

# Développements pour l'agrégation externe de mathématiques

Vincent Bagayoko

Session 2016-2017

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notations et conventions</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analyse et probabilités</b>	<b>3</b>
2.1	Dichotomie de Fatou et Julia . . . . .	3
2.2	Automorphismes des tores . . . . .	6
2.3	Deux applications du théorème de Baire . . . . .	8
2.4	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	10
2.5	Boules unité de normes . . . . .	12
2.6	Théorème de Banach-Stone . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Algèbre et géométrie</b>	<b>15</b>
3.1	Prolongement des isométries . . . . .	15
3.2	Polynômes et applications . . . . .	17
3.3	Théorème d'Artin-Schreier en caractéristique nulle . . . . .	19
3.4	Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ . . . . .	21
3.5	Théorème de Mazur-Ulam . . . . .	24
3.6	Polynômes caractéristique et minimal . . . . .	27

# 1 Notations et conventions

:

-Si  $X$  est un espace topologique,  $\pi_0(X)$  désigne l'ensemble de ses composantes connexes.

-Si  $E$  est un ensemble,  $\mathbf{1}_E$  désigne l'indicatrice de  $E$ , étant entendu implicitement que si l'on travaille dans un ensemble  $F \supset E$ ,  $\mathbf{1}_E \in \{0; 1\}^F$ .

-Si  $f : E \rightarrow E$  est une application,  $f^{[0]}$  désigne  $\text{id}_E$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{[n+1]} := f \circ f^{[n]} : E \rightarrow E$ .

- $\mathbb{U}$  est le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 avec la topologie induite par celle de  $\mathbb{C}$ ,  $(\mathbb{U}^n, \star)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  est sa puissance directe  $n$ -ième.

-On écrira  $\cdot$  les produits scalaires.

-Si  $(X, d)$  est un espace métrique,  $\text{Isom}(X)$  désigne le groupe des bijections  $f : X \rightarrow X$  telles que  $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ , dites isométries de  $(X, d)$ , muni de la loi de composition des applications.

-Si  $k$  est un corps,  $\tilde{k}$  désigne une clôture algébrique de  $k$ . (il n'y aura pas d'ambiguïté dans les développements)

Les applications sont identifiées à leur graphe; une application qui en contient une autre la *prolonge*.

## 2 Analyse et probabilités

### 2.1 Dichotomie de Fatou et Julia

Soit  $f$  une fonction polynomiale  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de degré 2. On note  $K_f$  l'ensemble des nombres complexes dont l'orbite par  $f$  est bornée.

$K_f$  est compact, non vide, et répond à l'alternative suivante:

- $K_f$  possède  $2^{\aleph_0}$  composantes connexes.

- $K_f$  est connexe.

\*\*\*

Réduction aux  $f_c \equiv z \mapsto z^2 + c$ :

Pour  $f$  polynomiale de degré 2, un simple calcul montre qu'il existe une unique application  $g$  polynomiale de degré 1 (c'est-à-dire une bijection affine) et un unique nombre complexe  $c$  tels que  $g \circ f \circ g^{-1} = (z \mapsto z^2 + c) =: f_c$ .

$K_{f_c} = \{z \in \mathbb{C} \mid (f_c^{[n]}(z))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée $\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (g \circ f^{[n]} \circ g^{-1}(z))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée $\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (f^{[n]} \circ g^{-1}(z))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée $\} = g(\{z \in \mathbb{C} \mid (f^{[n]}(z))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée $\}) = g(K_f)$ .  $K_f = g^{-1}(K_{f_c})$ .

$g^{-1}$  étant un homéomorphisme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $K_f$  et  $K_{f_c}$  possèdent les mêmes propriétés topologiques, donc on peut se ramener à l'étude de  $K_{f_c}$ .

Compacité

Soit  $c \in \mathbb{C}$  fixé. Soit  $r > |c| + 1$  fixé.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $V_n := f_c^{[n]-1}(B(0, r))$ . Puisque  $f_c^{[n]}$  est ouverte,  $f_c^{[n]-1}(\overline{B(0, r)}) = \overline{V_n}$ . Soit  $z \in \mathbb{C} - V_0$ .

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| = |z^2| \left| 1 + \frac{c}{z^2} \right| \geq |z|^2 \left| 1 - \frac{|c|}{|z|^2} \right| = |z|^2 \left( 1 - \frac{|c|}{|z|^2} \right) > |z|^2 \frac{|c|+1+|c|^2}{(|c|+1)^2} \geq \frac{|z|^2}{|c|+1} \cdot |f_c(z)| > \frac{r}{|c|} z.$$

Par induction,  $(|f_c^{[n]}(z)|)_{n \in \mathbb{N}} \geq ((\frac{r}{|c|})^n r)_{n \in \mathbb{N}}$ , diverge, donc  $K_{f_c} \subset V_0$ . De plus, on a  $\forall z, z \notin V_0 \implies f_c(z) \notin \overline{V_0}$  d'où par induction:  $\forall n \in \mathbb{N}, K_{f_c} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n$ .

Cela fournit les relations  $K_{f_c} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$ . L'inclusion inverse se déduit immédiatement du fait que  $V_0$  est borné. Ainsi,  $K_{f_c} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$ .

En tant qu'intersection dénombrable décroissante de compacts (les  $f_c^{[n]}$  sont polynomiales de degré non nul donc propres) non vides (les  $f_c^{[n]}$  sont polynomiales de degré non nul donc surjectives),  $K_{f_c}$  est un compact non vide.

Une dichotomie fondamentale

Pour  $X \subset \mathbb{C}$ , notons  $\sqrt{X} := \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in X\} = f_0^{-1}(X)$ .

La dichotomie provient de celle mise en évidence par les deux lemmes suivants:

**Lemme 1:**

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  contenant 0.

$\sqrt{\Omega}$  est simplement connexe.

★ ★

$\sqrt{\Omega}$  est ouvert et contient 0, donc on peut fixer  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(0, \varepsilon) \subset \sqrt{\Omega}$ .

-Pour prouver que  $\sqrt{\Omega}$  est connexe par arcs, il suffit de prouver que pour  $z \in \sqrt{\Omega} - B(0, \varepsilon)$ , il existe un chemin  $\gamma$  dans  $\sqrt{\Omega}$  de source  $z$  et de but dans  $B(0, \varepsilon)$ . Soit  $z \in \sqrt{\Omega} - B(0, \varepsilon)$ . Par connexité par arcs de  $\Omega$ , on dispose d'un chemin  $\gamma : z^2 \rightarrow \frac{\varepsilon^2}{4}$  dans  $\Omega$ .

$\gamma$  est homotope avec extrémités fixées et relativement à  $\mathbb{C} - B(0, \varepsilon^2)$  à un lacet  $\gamma'$  de  $\mathbb{C} - B(0, \frac{\varepsilon^2}{5})$ , et ce dernier est donc un lacet de  $\Omega$ .

Par relèvement de chemin dans  $\mathbb{C}^*$  par le carré complexe, en choisissant respectivement  $z, \frac{\varepsilon}{2}$  comme racines de  $z^2, \frac{\varepsilon^2}{4}$ , on obtient un chemin  $\gamma''$  de  $z$  vers  $\frac{\varepsilon}{2}$  dans  $\sqrt{\Omega}$ . Donc  $\sqrt{\Omega}$  est connexe par arcs.

-Soit  $\gamma_0 : [0; 1] \rightarrow \sqrt{\Omega}$  un lacet pointé en 0.

$\gamma_0$  est homotope (avec extrémités mobiles) relativement à  $\mathbb{C} - B(0, \varepsilon)$ , donc dans  $\sqrt{\Omega}$ , à un lacet  $\gamma_1$  de  $\mathbb{C} - B(0, \varepsilon)$ .

Par simple connexité de  $\Omega$ ,  $\gamma_1^2$  est homotope à un lacet constant, et par relèvement unique des homotopies par la fonction carré,  $\gamma_1$  est homotope dans  $\sqrt{\Omega}$  à un lacet constant, donc il en est de même pour  $\gamma_0$ .

Ainsi,  $\sqrt{\Omega}$  est simplement connexe.

★ ★

**Lemme 2:**

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe non vide de  $\mathbb{C}^*$ .

$\sqrt{\Omega}$  est la réunion disjointe de deux copies biholomorphes de  $\Omega$ .

★ ★

$\Omega$  est simplement connexe et ne contient pas 0 donc on dispose d'une détermination  $\wp : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$  de la racine carrée sur  $\Omega$ .

$s$  est biholomorphe sur son image; il en est donc de même pour  $-\wp$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^2 \in \Omega$ .  $z^2 - \mathfrak{s}(z)^2 = (z - \mathfrak{s}(z))(z + \mathfrak{s}(z)) = 0$  donc  $z = \mathfrak{s}(z)$  ou  $z = -\mathfrak{s}(z)$ .

Ainsi,  $\sqrt{\Omega} = \mathfrak{s}(\Omega) \cup (-\mathfrak{s})(\Omega)$ , où ces deux ensembles sont biholomorphiquement équivalents à  $\Omega$ .

Cette union est disjointe, car pour  $z, z' \in \Omega$  hypothétiques tels que  $\mathfrak{s}(z) = -\mathfrak{s}(z')$ , on a  $z = \mathfrak{s}(z)^2 = \mathfrak{s}(z')^2 = z'$ , et  $\mathfrak{s}(z) = -\mathfrak{s}(z)$ , puis  $\mathfrak{s}(z) = 0$ , puis  $z = \mathfrak{s}(z)^2 = 0 \in \Omega$ : contradictoire.

★ ★

### Preuve du théorème

-Supposons que  $0 \in K_{f_c}$ . C'est-à-dire que  $c$  est dans chacun des  $V_n$ . D'après le lemme 1, pour tout ouvert simplement connexe  $X \subset \mathbb{C}$  contenant  $c$ ,  $f_c^{-1}(X) = f_0^{-1}(X - c)$  est simplement connexe. Par induction, les  $V_n$  sont simplement connexes, connexes. Les  $\overline{V_n}$  sont compact connexes, et  $K_{f_c}$  est connexe en tant qu'intersection décroissante de compacts connexes.

-Supposons que  $0 \notin K_{f_c}$ . Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $0 \in V_{n_0}$ . Comme précédemment,  $V_{n_0+1} - c$  est simplement connexe inclus dans  $\mathbb{C}^*$ . Donc d'après le lemme 2,  $V_{n_0+2}$  admet deux composantes connexes simplement connexes, incluses dans  $\mathbb{C} - \{c\}$ . Par induction, on voit que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\pi_0(V_{n_0+1+k+1}) = \{\mathfrak{s}(X - c); (-\mathfrak{s})(X - c) \mid X \in \pi_0(V_{n_0+1+k})\}$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{N}_k := \{0; 1\}^{\{1; \dots; k\}}$ , et  $\mathcal{N} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_k$ . Pour  $X \in \pi_0(V_{n_0+1+k})$  on se donne un unique nom  $u_X \in \mathcal{N}_k$  par induction:  $u_{V_{n_0+1}}$  est l'application vide, et pour  $k \in \mathbb{N}$ , pour  $X \in \pi_0(V_{n_0+1+k})$ , on pose  $u_{\mathfrak{s}(X-c)} := u_X \cup \{(k+1, 0)\}$  et  $u_{(-\mathfrak{s})(X-c)} := u_X \cup \{(k+1, 1)\}$ . Pour  $u, v \in \mathcal{N}$ ,  $v \subsetneq u$  si et seulement si  $X(v) \subsetneq X(u)$  où  $u_{X(u)} = u$  et  $u_{X(v)} = v$ . Puisqu'on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ , on a même  $\forall u, v \in \mathcal{N}$ ,  $u \subsetneq v \iff \overline{X(v)} \subsetneq X(u)$

Soit  $u \in \{0; 1\}^{\mathbb{N}}$ . Soit  $X_u := \bigcap_{v \subsetneq u} X(v)$ .  $X_u = \bigcap_{v \subsetneq u} \overline{X(v)}$  et cette intersection

est décroissante, donc comme précédemment,  $X_u$  est compact connexe non vide.

Il ne reste plus qu'à remarquer que  $K_{f_c} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_{n_0+1+k} = \bigcup_{u \in \{0; 1\}^{\mathbb{N}}} X_u$ .  $K_{f_c}$  est donc une union de  $2^{\aleph_0}$  parties connexes de  $\mathbb{C}^*$  disjointes deux à deux, ce qui conclut la preuve.

★ ★ ★

### Leçons:

**204** - Connexité. Exemples et applications.

**245** - Fonctions holomorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.

## 2.2 Automorphismes des tores

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{U}^n)$  des automorphismes continus de  $(\mathbb{U}^n, \star)$  est isomorphe à  $GL_n(\mathbb{Z})$ .

\*\*\*

Remarques:

-On identifiera les éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  et les endomorphismes associées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

-Par compacité et séparation de  $\mathbb{U}^n$ , toute bijection continue  $\mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  est un homéomorphisme, d'où le fait que  $\text{Aut}(\mathbb{U}^n)$  soit un groupe.

Soit  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  un morphisme de groupes continu.

On note  $E$  le morphisme continu surjectif  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  donné pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  par  $E(x) := (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n})$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on note  $g_i := f_i \circ E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{U}$ , de sorte que  $g := (g_1, \dots, g_n) = f \circ E$ .

Soit  $1 \leq i \leq n$ .  $g_i$  est continue  $2\pi$ -périodique en chacune de ses variables, donc on dispose de son développement de Fourier. Par ailleurs,  $g_i$  n'est pas nulle car  $0 \notin \mathbb{U}$ , donc par injectivité du développement de Fourier sur  $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , il existe  $m_i =: (m_{i,1}, \dots, m_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$  que l'on fixe tel que:

$$(2\pi)^n c_{m_i} = \int_{[-\pi; \pi]^n} g_i(u) e^{-im_i \cdot u} du \neq 0.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi; \pi]^n - x} g_i(u+x) e^{-im_i \cdot (u+x)} du & \stackrel{2\pi\text{-period}}{=} \int_{[-\pi; \pi]^n} g_i(u+x) e^{-im_i \cdot (u+x)} dt = \\ \int_{[-\pi; \pi]^n} (g_i(u) e^{-im_i \cdot u}) g_i(x) e^{-im_i \cdot x} du & = g_i(x) e^{-im_i \cdot x} \int_{[-\pi; \pi]^n} g_i(u) e^{-im_i \cdot u} du. \end{aligned}$$

D'où  $c_{m_i} = c_{m_i} g_i(x) e^{-im_i \cdot x}$ .

En divisant par  $c_{m_i}$ , on obtient  $g_i(x) = e^{im_i \cdot x}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

On note  $m_f := (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ , de sorte que  $f \circ E = E \circ m_f$ . Il s'agit de montrer que  $\varphi := f \mapsto m_f$  est un isomorphisme  $\text{Aut}(\mathbb{U}^n) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ .

-Pour  $f \in \text{Aut}(\mathbb{U}^n)$ , la relation  $f \circ E = E \circ m_f$  détermine  $m_f$ . En effet, si  $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  sont telles que  $E \circ m_1 = E \circ m_2$ , on a  $E \circ (m_1 - m_2) = \mathbf{1}_{\mathbb{U}^n}$ , donc  $\text{Im}(m_1 - m_2) \subset \text{Ker}(E) = 2\pi\mathbb{Z}^n$ . Puisque  $\mathbb{R}^n$  est connexe,  $\text{Im}(m_1 - m_2)$  est inclus dans la composante connexe  $\{0\}$  de  $(m_1 - m_2)(0) = 0$  dans  $2\pi\mathbb{Z}^n$ , d'où  $m_1 = m_2$ . Autrement dit,  $\varphi$  est une application.

-Soient  $f_1, f_2 \in \text{Aut}(\mathbb{U}^n)$ .  $E \circ \varphi(f_1 \circ f_2) = f_1 \circ f_2 \circ E = f_1 \circ E \circ \varphi(f_2) = E \circ \varphi(f_1) \circ \varphi(f_2)$ . Donc  $\varphi$  est un morphisme.

- $\text{Ker}(\varphi) = \{f \in \text{Aut}(\mathbb{U}^n) \mid f \circ E = E\} = \{\text{id}_{\mathbb{U}^n}\}$  par surjectivité de  $E$ :  $\varphi$  est injective.

-Soit  $f \in \text{Aut}(\mathbb{U}^n)$ .  $\varphi(f^{-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  est l'inverse de  $\varphi(f)$ , donc  $\varphi(f) \in GL_n(\mathbb{Z})$ .

-Réciproquement, par surjectivité de  $E$ , pour  $m \in GL_n(\mathbb{Z})$ , il existe une unique application  $f_m : \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^n$  telle que  $f_m \circ E = E \circ m$ .

Soient  $Z = E(X), Z' = E(X') \in \mathbb{U}^n$ .  $f_m(Z \star Z') = f_m \circ E(X + X') = E \circ m(X + X') = E(m(X) + m(X')) = E \circ m(X) \star E \circ m(X') = f_m \circ E(X) \star f_m \circ E(X') = f_m(Z) \star f_m(Z')$ .

Donc  $f_m$  est un endomorphisme.

Pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $(f_m)_i = (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{m_{i,1}} \times \dots \times z_n^{m_{i,n}}$  est polynomiale donc continue. Donc  $f_m$  est continue.

$\text{Ker}(f_m) \subset E(m^{-1}(2\pi\mathbb{Z}^n)) \subset E(2\pi\mathbb{Z}^n) = \{(1, \dots, 1)\}$  donc  $f_m$  est injective.  $\text{Im}(f_m) \supset E(\text{Im}(m)) = E(\mathbb{R}^n) = \mathbb{U}^n$  donc  $f$  est surjective.

Finalement,  $f_m \in \text{Aut}(\mathbb{U}^n)$ , ce qui montre que  $m \mapsto f_m$  est l'inverse à droite de  $\varphi$ , qui est donc un isomorphisme de groupes.

\*\*\*

Leçons:

**246** - Séries de Fourier. Exemples et applications.

**102** - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupe des racines de l'unité. Applications.

## 2.3 Deux applications du théorème de Baire

(i): Tout espace de Banach admettant une famille génératrice dénombrable est de dimension finie.

(ii): Si  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  satisfait  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{(n_x)}(x) = 0$ , alors  $f$  est polynomiale.

\*\*\*

On utilisera la version suivante du théorème de Baire: *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet non vide.  $X$  n'est pas une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

(i): Soit  $E$  un espace de Banach admettant une famille  $f : \mathbb{N} \rightarrow E$  génératrice. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_n := \text{Vect}(f(0), \dots, f(n))$ . Les  $F_n$  sont fermés en tant que sous-espaces de  $E$  de dimension finie.

$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ , donc il existe un entier naturel  $n$  tel que  $F_n$  n'est pas d'intérieur vide. Soient  $x \in F_n, \varepsilon > 0$  tels que  $B(x, \varepsilon) \subset F_n$ . Par translation de vecteur  $-x$  et homothétie,  $E = F_n$  est donc de dimension finie.

(ii): On considère une telle application  $f$ , et on suppose  $f$  non polynomiale.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_n$  le fermé  $(f^{(n)})^{-1}(\{0\})$ .  $X := \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ n'est polynomiale sur aucun voisinage de } x\}$  est fermé par définition, donc complet.

Pour  $y \in \mathbb{R} - X$ , on note  $I_y$  l'intervalle maximal contenant  $y$  sur lequel  $f$  est polynomiale.  $I_y \neq \mathbb{R}$ , car  $f$  n'est pas polynomiale. Donc par exemple  $I_y$  admet une borne supérieure, et  $f$  n'est polynomiale sur aucun voisinage de  $\sup(I_y)$  par maximalité de  $I_y$ , donc  $\sup(I_y) \in X$ . Ainsi, si  $X \neq \mathbb{R}$ ,  $X$  n'est pas vide, donc  $X$  n'est pas vide. De plus, pour  $x \in X$ , et  $x < y \notin X, x < \inf(J_y) \leq y$  et  $\inf(J_y) \in X$  par continuité de  $f$  et de l'application polynomiale coïncidant avec  $f$  sur  $J_y$ . Donc tout élément de  $X$  est un point d'accumulation de  $X$ .

$(X, | \cdot |)$  est un espace complet non vide qui est la réunion de ses fermés  $Z_n \cap X, n \in \mathbb{N}$ . D'après le théorème de Baire, il existe un entier naturel  $n$  tel que  $Z_n \cap X$  est d'intérieur non vide.

Soit  $]a; b[$  un intervalle ouvert non vide tel que  $]a; b[ \cap X \subset Z_n$ . Soit  $x \in ]a; b[ \cap X$ .  $x$  est un point d'accumulation de  $X \cap ]a; b[$ , donc  $\exists (x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (]a; b[ \cap X - \{x\})^{\mathbb{N}}, f^{(n+1)}(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n)}(x_p) - f^{(n)}(x)}{x_p - x} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{0 - 0}{x_p - x} = 0$ . Donc  $]a; b[ \cap X \subset$



$Z_{n+1}$ , et par induction,  $\forall k \geq n, ]a; b[ \cap X \subset Z_k$ .

Soit  $y \in ]a; b[-X$ . Soient  $c < d$  des réels tels que  $J_y = ]c; d[$ .  $f$  est polynomiale sur  $]c; d[$  donc sur  $[c; d]$ . Si  $f$  est nulle sur  $[c; d]$ , alors  $f^{(n)}$  est nulle sur  $]a; b[$ , donc  $]a; b[ \cap X = \emptyset$ : contradictoire. Donc  $f$  est de degré  $\geq 0$  sur  $[c; d]$ , et  $f^{(\deg(f))}$  est non nulle en  $c$  et  $d$ . Mais  $c \in X$  ou  $d \in X$ , donc  $c \in Z_k$  ou  $d \in Z_k$  pour tout  $k \geq n$ , donc  $\deg(f) < n$ . On en déduit de même que  $f^{(n)}$  est nulle sur  $]a; b[$ , ce qui est à nouveau contradictoire.

C'est donc que  $f$  est polynomiale.

\*\*\*

Leçons:

**204** - Connexité. Exemples et applications.

**205** - Espaces complets. Exemples et applications.

**208** - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

## 2.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit  $E$  un espace de Banach. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$ , et soit  $F : \Omega \rightarrow E$  continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.

Pour  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , il existe un couple solution  $(y_m, I_m)$  maximum pour la relation de prolongement de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions du *problème de Cauchy*  $(F, t_0, x_0)$ :

-  $\{t_0\} \subsetneq I$  est un intervalle

-  $\forall t \in I, y'(t) = F(t, y(t))$

-  $y(t_0) = x_0$ .

De plus,  $I_m$  est ouvert.

\*\*\*

### Existence locale

Puisque  $F$  est localement lipschitzienne en la seconde variable en  $(t_0, x_0)$ , il existe un réel  $L > 0$ , un voisinage ouvert  $I$  de  $t_0$  et un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  tels que  $I \times U \subset \Omega$ , et que pour  $(t, x, x') \in J \times U^2$ ,  $|F(t, x) - F(t, x')|_E \leq L|x - x'|_E$ .  $F : \Omega \rightarrow E$  est continue en  $(t_0, x_0)$ , donc il existe un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $I \times U$  sur lequel  $F$  est bornée. Soit  $M$  une borne de  $F$  sur  $V$ . Soient  $\varepsilon, r > 0$  tels qu'en notant  $I_0 := ]t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon[$  et  $B := \overline{B_E(x_0, r)}$ , on ait  $I_0 \times B \subset V$ . On peut choisir  $\varepsilon$  indépendamment de  $r$  et  $L$ , et imposer de plus  $\varepsilon M \leq r$  ainsi que  $\varepsilon L < 1$ .

Puisque  $B$  est un fermé de  $E$ ,  $\mathcal{C}^0(I_0, B)$  est un fermé du Banach  $(\mathcal{F}_b(I_0, E), \|\cdot\|_\infty)$ , donc  $\mathcal{C}^0(I_0, B)$  est complet. (non vide)

$$\text{Soit } \varphi_0 := \left( \begin{array}{c} \mathcal{C}^0(I_0, B) \xrightarrow{\quad} \mathcal{C}^0(I_0, B) \\ f \mapsto \left( \begin{array}{c} I_0 \rightarrow B \\ t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t F(s, f(s)) \, ds \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Vérifions que  $\varphi_0$  est bien définie. Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I_0, B)$ . Pour  $t \in I_0$ ,  $|\varphi_0(f)(t) - x_0|_E = \left| \int_{t_0}^t F(s, f(s)) \, ds \right|_E \leq |t - t_0| \sup_{(s,x) \in I_0 \times B} |F(s, x)|_E \leq \varepsilon M \leq r$ . Par ailleurs, par continuité de  $f$ ,  $F$  et de l'identité sur  $I_0$ ,  $s \mapsto F(s, f(s))$  est continue sur  $I_0$ , donc  $\varphi_0(f)$  est continue et même de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I_0$ . Cela montre que  $\varphi_0(f) \in \mathcal{C}^0(I_0, B)$ .

$$\text{Soient } f, g \in \mathcal{C}^0(I_0, B), \text{ soit } t \in I_0. |\varphi_0(f)(t) - \varphi_0(g)(t)|_E \leq \int_{t_0}^t |F(s, f(s)) - F(s, g(s))|_E \, ds \leq \int_{t_0}^t L|f(s) - g(s)|_E \, ds \leq \varepsilon L \|f - g\|_\infty.$$

Puisque  $\varepsilon L < 1$ , cela prouve que  $\varphi_0$  est  $\|\cdot\|_\infty$ -contractante. D'après le théorème du point fixe de Picard,  $\varphi_0$  admet un unique point fixe  $f_0$  dans  $\mathcal{C}^0(I_0, B)$ .

$f_0(t_0) = \varphi_0(f_0)(t_0) = x_0$ ; de plus  $f_0 = \varphi_0(f_0)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I_0$ , et pour  $t \in I_0$ , on a  $f'_0(t) = \varphi_0(f_0)'(t) = F(t, f_0(t))$ :  $(f_0, I_0) \in \mathcal{S}$ .

### Unicité locale

Soient  $(f, I), (g, J) \in \mathcal{S}$  où  $t_0 \in I \overset{\circ}{\cap} J$ . Par continuité de  $f$  et  $g$  en  $t_0$ , il existe un intervalle ouvert  $I_1 \subset I_0 \cap I \cap J$  tel que  $f|_{I_1}, g|_{I_1} \in \mathcal{C}^0(I_1, B)$ . Ce sont donc des points fixes de l'application  $\varphi_1$  correspondante, qui en possède un unique. Donc  $f$  et  $g$  coïncident sur le voisinage  $I_1$  de  $t_0$ . Autrement dit, les solutions du problème de Cauchy  $(F, t_0, x_0)$  définies sur voisinage de  $t_0$  sont localement uniques.

### Unicité globale

Soient  $(f, I), (g, J) \in \mathcal{S}$ . Soit  $K$  l'ensemble des réels  $t \in I \cap J$  tels que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $[t_0; t]$ . ( $t_0 \in K$ ), et par continuité de  $f$  et  $g$  sur  $I \cap J$ ,  $K$  est un fermé de  $I \cap J$ . De plus  $K$  est convexe donc est un intervalle. Supposons que  $K \subsetneq I \cap J$ . Alors  $K$  admet une borne  $\alpha$  dans  $I \overset{\circ}{\cap} J$ . Par continuité de  $f$  et  $g$ ,  $f(\alpha) = g(\alpha)$ . Ainsi,  $(f|_{I \cap J}, I \cap J)$  et  $(g|_{I \cap J}, I \cap J)$  sont des solutions du problème de Cauchy  $(F, \alpha, f(\alpha))$  définies sur un voisinage de  $\alpha$ , donc par unicité locale, elles coïncident sur un voisinage de  $\alpha$  inclus dans  $I \overset{\circ}{\cap} J$ , donc  $\alpha$  n'est pas une borne de  $K$ : contradictoire. On en déduit que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $I \cap J$ .

### Solution maximum

Soit  $\mathcal{I}$  la première projection de  $\mathcal{S}$ .  $I \in \mathcal{I}$ . Soit  $I_m = \bigcup \mathcal{I}$ .  $I_m$  est un intervalle contenant  $t_0$  en tant qu'union de connexes contenant  $t_0$ .

Posons  $y_m := \{(t, x) \in \Omega \mid \exists (f, J) \in \mathcal{S}, x = f(t)\}$ . Soit  $t \in I_m$ . Par unicité globale,  $y_m$  est une application de domaine  $I_m$  qui prolonge toute solution du problème de Cauchy  $(F, t_0, x_0)$ .

Soit  $t \in I_m$ . Soit  $(f, I) \in \mathcal{S}$  telle que  $t \in I$ . Par existence locale, il existe une solution  $(g, J)$  du problème de Cauchy  $(F, t, f(t))$  sur un voisinage  $J$  de  $t$ . Par unicité globale,  $f$  et  $g$  coïncident sur  $I \cap J$ , donc  $(f \cup g, I \cup J) \in \mathcal{S}$ . Cela montre que tout élément de  $I_m$  admet un voisinage appartenant à  $\mathcal{I}$ . On en déduit que  $I_m$  est ouvert.

Soit  $t \in I_m$ . Soit  $I \in \mathcal{I}$  un voisinage de  $t$ , soit  $f$  telle que  $(f, I) \in \mathcal{S}$ .  $f \subset y_m$ , donc  $y_m$  est dérivable en  $t$  et  $y'_m(t) = f'(t) = F(t, f(t)) = F(t, y_m(t))$ .

Donc  $(y_m, I_m) \in \mathcal{S}$  est la solution maximum du problème de Cauchy.

\*\*\*

### Leçons:

**204** - Connexité. Exemples et applications.

**205** - Espaces complets. Exemples et applications.

**220** - Equations différentielles  $X' = f(t, X)$ . Exemples d'études des solutions en dimensions 1 et 2.

## 2.5 Boules unité de normes

Soit  $(E, | \cdot |)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. On considère les conditions suivantes portant sur une partie  $B$  de  $E$ :

- $B$  est convexe.

- $B$  est ouverte.

- $0 \in B$

- $\forall z \in K, |z| = 1 \Rightarrow z.B = B$ .

- $B$  est bornée.

$\overline{B}$  est la boule unité fermée d'une unique norme sur  $E$  équivalente à  $| \cdot |$  si et seulement si  $B$  satisfait ces conditions.

\*\*\*

\*\*\*

Leçons:

## 2.6 Théorème de Banach-Stone

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques séparés compacts et connexes.

Pour toute isométrie linéaire surjective  $F : \mathbb{R}(X) \rightarrow \mathbb{R}(Y)$ , il existe un unique homéomorphisme  $\varphi_F : Y \rightarrow X$  et un unique réel  $\varepsilon_F \in \{-1; 1\}$  tel que  $\forall f \in \mathbb{C}(X), F(f) = \varepsilon_F \cdot f \circ \varphi_F$ .

\*\*\*

D'après le théorème de représentation de Riesz, l'application  $\psi_X$  de l'ensemble  $\mathcal{M}(X)$  des mesures boréliennes signées intérieurement régulières dans  $\mathbb{R}(X)^*$  donnée par  $\psi_X(\mu) := (f \mapsto \int_X f d\mu)$  est une isométrie surjective pour la norme de la variation totale sur  $\mathcal{M}(X)$ . On dispose de même d'une isométrie  $\psi_Y : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathbb{R}(Y)^*$ .

Soit  $F^* : \mathbb{R}(Y)^* \rightarrow \mathbb{R}(X)^*$  l'adjoint de  $F$ .  $F^*$  est une isométrie surjective, donc  $F^* := \psi_X^{-1} \circ F^* \circ \psi_Y : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X)$  est une isométrie surjective.

On en déduit que  $F^*$  préserve les points extrémaux des sphères unité de  $\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(Y)$ , qu'il s'agit maintenant de déterminer.

### Lemme

Si  $Z$  est un espace topologique séparé compact, les points extrémaux de la sphère unité  $\mathbb{S}_Z$  de  $\mathcal{M}(Z)$  sont les mesures de Dirac et leurs opposés.

\*\*

-Soit  $\mu \in \mathcal{M}(Z)$  un point extrémal de  $\mathbb{S}$ ; en particulier,  $\mu$  est non nulle. Supposons qu'il existe un borélien  $A \subset Z$  tel que  $0 < |\mu(A)| < 1$ .

On note  $\mu_A$  la mesure  $\mu(A)^{-1} \cdot \mu(A \cap \cdot)$ ,  $\mu_{X-A}$  la mesure  $\mu(Z-A)^{-1} \cdot \mu(\cdot - A)$ . Ces mesures sont bien de variation totale 1, et  $\mu = \mu(A) \cdot \mu_A + \mu(Z-A) \cdot \mu_{Z-A}$  n'est pas extrémale: contradictoire.

Ainsi, pour tout borélien  $A$  de  $Z$ ,  $\mu(A) = 0$  ou  $|\mu(A)| = 1$ .

Supposons qu'il existe  $z \neq z'$  dans le support de  $\mu$ . Par séparation de  $Z$ , on trouve des voisinages ouverts  $U, U'$  respectifs de  $z, z'$  qui les séparent.  $\mu(U) + \mu(U') = \mu(U \sqcup U') \in \{-1; 1\}$  avec  $\mu(U), \mu(U') \in \{-1; 0; 1\}$ , donc on a  $\mu(U) = 0$  ou  $\mu(U') = 0$ , ce qui contredit la supposition que  $z, z'$  sont dans le support de  $\mu$ .

Donc le support de  $\mu$ , qui n'est pas vide puisque  $\mu$  est non nulle, est un singleton  $\{z\}$ , et  $\mu$  est un multiple non nul de  $\delta_z$ . On déduit  $\mu \in \{\delta_z; -\delta_z\}$  du fait que  $|\mu(\{z\})| = 1$ .

-Pour  $z \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$  et  $\mu, \nu \in \mathbb{S}_Z$ ,  $\delta_z = \frac{1}{2} \cdot (\mu + \nu)$  entraîne que  $\mu, \nu$  sont de support  $\{z\}$ , donc du fait qu'elles sont de variation totale 1, on déduit  $\mu = \nu = \varepsilon \cdot \delta_z$ .

Ainsi, les  $\delta_z$  et leurs opposés sont des points extrémaux de  $\mathbb{S}_Z$ .

★ ★

On note  $\delta_X$  la fonction  $X \rightarrow \mathcal{M}(X)$  qui à  $x \in X$  associe  $\delta_x$ . Montrons que  $E_X := \psi_X \circ \delta_X$ , la fonctionnelle d'évaluation, induit un homéomorphisme sur son image pour la topologie faible-\*

Soit  $U \subset \mathbb{R}(X)^*$  un ouvert non vide, soit  $x \in E_X^{-1}(U)$ . C'est-à-dire que  $\exists r > 0, \exists f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}(X), \{\varphi \in \mathbb{R}(X)^* \mid \forall 1 \leq i \leq n, |f_i(x) - \varphi(f_i)| < r\} \subset U$ . Par continuité des  $f_i$  et du fait qu'elles sont en nombre fini,  $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(B(f_i(x), r))$

est un voisinage de  $x$  dans  $E_X^{-1}(U)$ , ce qui montre que  $E_X$  est continue.

$\mathbb{R}(X)^*$  est séparé pour la topologie faible-\*, donc  $E_X(X)$  est séparé.  $E_X$  induit une bijection continue d'un compact vers un séparé, donc un homéomorphisme. On notera  $E_X^{-1}$  sa réciproque sur  $E_X(X)$ .

Soit  $y \in Y$ .  $F^*(\delta_y)$  est extrémal  $\mathbb{S}_X$ , donc d'après le lemme, il existe  $\varepsilon(y) \in \{-1; 1\}$  et  $\varphi_F(y) \in X$  tels que  $F^*(\delta_y) = \varepsilon(y)\delta_{\varphi_F(y)}$ .

$\varphi_F$  est surjective, car tout point extrémal  $\varepsilon.\delta_x$  dans  $\mathbb{S}_X$  admet un antécédent extrémal  $\varepsilon'.\delta_y$  par  $F^*$  dans  $\mathbb{S}_Y$ , et l'identité  $F^*(\varepsilon'.\delta_y) = \varepsilon'_{F^*}.\delta_{\varphi(y)} = \varepsilon.\delta_x$  entraîne  $\varphi_F(y) = x$ .  $\varphi_F$  est injective par injectivité de  $\delta_Y$ .

On peut réécrire l'identité en :

$$\forall y \in Y, \psi_X^{-1} \circ F^* \circ \psi_Y(\delta_y) = \psi_X^{-1}((\psi_Y(\delta_y) \circ F) = \varepsilon(y).\delta_{\varphi_F(y)}.$$

On en déduit par linéarité de  $\psi_X^{-1}$  que  $\forall y \in Y, \forall f \in \mathbb{R}(Y), (\psi_Y(\delta_y) \circ F)(f) = F(f)(y) = \psi_X(\varepsilon(y).\delta_{\varphi_F(y)})(f) = \varepsilon(y)f(\varphi_F(y))$ , qui est la relation cherchée.

$\varepsilon = F(\mathbf{1}_X) \in \mathbb{C}(Y)$ , ce qui justifie en outre l'unicité de  $\varepsilon$ . Puisque  $\varepsilon$  est continue et  $Y$  est connexe,  $\varepsilon$  est constante, on note  $\varepsilon_F$  a valeur.

$\delta_X \circ \varphi_F = \varepsilon_F.F^*$ , donc  $E_X \circ \varphi_F = \varepsilon_F.F^* \circ E_Y$ , d'où  $\varphi_F = E_X^{-1} \circ \varepsilon_F.F^* \circ E_Y$ . Cela justifie notamment l'unicité de  $\varphi_F$ .

Par continuité de  $F^*$  pour les topologies faible-\* ( $F^*$  est continue pour les topologies fortes donc pour les topologies faibles-\*), et continuité de  $E_Y, E_X^{-1}$ ,  $\varphi$  est continue.

$\varphi_F$  est continue bijective,  $Y$  est compact et  $X$  est séparé, donc  $\varphi$  est un homéomorphisme.

★ ★ ★

### Leçons:

**201** - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

**203** - Utilisation de la notion de compacité.

**208** - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

**253** - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

### 3 Algèbre et géométrie

#### 3.1 Prolongement des isométries

Soit  $(E, \cdot)$  un espace affine euclidien. On note  $|\cdot|$  la norme associée à  $\cdot$ . Soit  $X$  une partie de  $E$ .

$\text{Isom}(X)$  se plonge canoniquement par prolongement dans  $\text{Isom}(E)$ .

\*\*\*

Prolongements

(Si  $X$  est vide, on peut prolonger l'application vide en l'isométrie  $\text{id}_E$ . Dans ce qui suit, on suppose  $X$  non vide.)

Soit  $f : X \rightarrow X$  une isométrie. Soit  $x_0 \in X$ .

On note  $U := \text{Vect}(X - x_0)$ , et  $V := \text{Vect}(X - f(x_0))$ .

$V = \text{Vect}(X - x_0 + x_0 - f(x_0)) = U + \text{Vect}(x_0 - f(x_0))$  où  $f(x_0) \in X$  donc  $x_0 - f(x_0) \in U$ . On en déduit que  $V = U$ .

D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $U$  telle que pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_0 + u_i =: x_i \in X$ . On note  $v_i$  les  $f(x_i) - f(x_0)$ ,  $i \in \{1; \dots; n\}$ .

Soit  $\varphi_f$  l'unique application linéaire  $U \rightarrow U$  telle que  $\forall 1 \leq i \leq n, \varphi_f(u_i) = v_i$ .

Soient  $1 \leq i, j \leq n$ .  $|\varphi_f(u_i) - \varphi_f(u_j)| = |v_i - v_j| = |f(x_i) - f(x_j)| = |x_i - x_j| = |u_i - u_j|$ . On en déduit que  $\forall 1 \leq i, j \leq n, \varphi_f(u_i) \cdot \varphi_f(u_j) = u_i \cdot u_j$ , donc que  $\varphi_f$  est une isométrie linéaire. On en déduit notamment que  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre (donc c'est une base de  $U$ ).

De plus, pour  $1 \leq i \leq n, |v_i| = |f(x_i) - f(x_0)| = |x_i - x_0| = |u_i|$ .

**Lemme:**

$\forall x \in X, f(x) = f(x_0) + \varphi_f(x - x_0)$ .

\*\*

Soit  $x \in X$ .  $x - x_0 \in U$ , donc il existe des réels  $a_1, \dots, a_n$  tels que  $x - x_0 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i$ . De même, il existe  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n b_i \cdot v_i$ .

Soit  $1 \leq i \leq n$ .

$|x - x_i|^2 = |x - x_0 + (x_0 - x_i)|^2 = |x - x_0|^2 + |x_i - x_0|^2 + 2(x - x_0) \cdot (x_0 - x_i) = |x - x_0|^2 + |u_i|^2 - 2 \sum_{j=1}^n a_j u_j \cdot u_i$ .

Notons  $G(u_1, \dots, u_n)$  la matrice de Gram de  $(u_1, \dots, u_n)$  pour  $\cdot$ . L'égalité précédente s'écrit  $|x - x_i|^2 = |x - x_0|^2 + |u_i|^2 - 2[G(u_1, \dots, u_n)(a_1, \dots, a_n)]_i$ .

$(u_1, \dots, u_n)$  est libre, donc  $G(u_1, \dots, u_n)$  est inversible.

Donc d'après ce qui précède  $(a_1, \dots, a_n) = G(u_1, \dots, u_n)^{-1}(\frac{1}{2}(|x - x_0|^2 + |u_1|^2 - |x - x_1|^2), \dots, \frac{1}{2}(|x - x_0|^2 + |u_n|^2 - |x - x_n|^2))$ .

De même,  $(b_1, \dots, b_n) = G(v_1, \dots, v_n)^{-1}(\frac{1}{2}(|f(x) - f(x_0)|^2 + |v_1|^2 - |f(x) - f(x_1)|^2), \dots, \frac{1}{2}(|f(x) - f(x_0)|^2 + |v_n|^2 - |f(x) - f(x_n)|^2))$ . On a remarqué les égalités  $|f(x) - f(x_i)| = |x - x_i|$  pour  $0 \leq i \leq n$ , les  $|v_i| = |u_i|$  pour  $1 \leq i \leq n$ , enfin, les  $v_i \cdot v_j = u_i \cdot u_j$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  induisent  $G(u_1, \dots, u_n) = G(v_1, \dots, v_n)$ ; d'où finalement  $(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)$ .

$$\text{Ainsi } f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i = \varphi_f(x - x_0).$$

★ ★

Soit  $\bar{f}$  l'application définie sur  $E = x_0 + (U \oplus U^\perp)$  par  $\bar{f}(x_0 + (u + u^\perp)) := f(x_0) + \varphi_f(u) + u^\perp$ .

D'après le lemme précédent,  $\bar{f}$  prolonge  $f$ . Il ne reste plus qu'à noter que  $\bar{f} - f(x_0)$  préserve la norme euclidienne, or pour  $u + u^\perp \in U \oplus U^\perp$ ,  $|\bar{f}(u + u^\perp) - f(x_0)|^2 = |\varphi_f(u) + u^\perp|^2 = |\varphi_f(u)|^2 + |u^\perp|^2 = |u|^2 + |u^\perp|^2 = |u + u^\perp|^2$ .

On a bien  $\bar{f} \in \text{Isom}(E)$ .

### Monomorphisme

On fixe une base  $(w_1, \dots, w_p)$  de  $U^\perp$ , et on note  $y_j$  les  $x_0 + w_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , de sorte que  $(x_0, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$  est un repère affine de  $E$ .

Soient  $f, g \in \text{Isom}(X)$ . Soit  $0 \leq i \leq n$ .  $\overline{f \circ g}(x_i) = f \circ g(x_i)$  puisque  $\overline{f \circ g}$  prolonge  $f \circ g$  sur  $X$ .

De même,  $\overline{g}(x_i) = g(x_i) \in X$  donc  $\overline{\bar{f}(\overline{g}(x_i))} = f(g(x_i))$ .

Soit  $1 \leq j \leq p$ .  $\overline{f \circ g}(y_j) = w_j = \bar{f}(y_j) = \overline{\bar{f}(\overline{g}(y_j))}$ .

$\overline{f \circ g}$  et  $\overline{\bar{f} \circ \overline{g}}$  sont deux applications affines qui coïncident sur le repère affine  $(x_0, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$  de  $E$ . Elles sont donc égales, d'où la qualité de morphisme de  $\bar{\cdot}$ .

Par inclusion de  $X$  dans  $E$ ,  $\bar{\cdot}$  est injectif.

★ ★ ★

### Leçons:

**160** - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.

**161** - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie.

**183** - Utilisation des groupes en géométrie.



### 3.2 Polynômes et applications

Soit  $A$  un anneau intègre. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On pose  $\lambda := \left( \begin{array}{c} A[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow A^{A^n} \\ P \mapsto ((a_1, \dots, a_n) \mapsto P(a_1, \dots, a_n)) \end{array} \right)$ .

(i):  $\lambda$  est injectif si et seulement si  $A$  est infini.

(ii):  $\lambda$  est surjectif si et seulement si  $A$  est fini.

\*\*\*

$\lambda$  est le morphisme de  $A$ -algèbres qui à un polynôme associe la fonction polynomiale lui correspondant canoniquement.

On utilisera le résultat suivant:

**Lemme:**

Si  $A$  est un anneau intègre infini,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in A[X_1, \dots, X_m]$  s'annule sur  $A^m - \{(0, \dots, 0)\}$ , alors  $P = 0$ .

\*\*

On le prouve par induction sur  $m$ .

-Soit  $P \in A[X_1]$  nul sur  $A - \{0\}$ . Par intégrité de  $A$ ,  $A[X_1]$  est intègre, et on peut appliquer le théorème de division euclidienne dans  $A[X_1]$  tant que les dividendes sont unitaires (plus généralement tant que leur coefficient dominant est inversible dans  $A$ ).

Ainsi, pour  $a \in A$  et  $Q \in A[X_1]$ , on a la relation  $Q(a) = 0 \implies (X_1 - a)|Q$ . Par induction et en utilisant les propriétés du degré, on en déduit que si  $Q$  est non nul, il admet au plus  $\deg(Q)$  racines comptées avec leur multiplicité.

Puisque  $P$  admet une infinité de racines, il est nul.

-Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  pour lequel le lemme est vrai. Soit  $P \in A[X_1, \dots, X_{m+1}]$  qui s'annule sur  $A^{m+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ .

Soit  $P_{m+1}$  l'image de  $P$  par l'isomorphisme canonique  $A[X_1, \dots, X_{m+1}] \rightarrow A[X_1, \dots, X_m][X_{m+1}]$ .

Soit  $a \in A - \{0\}$ .

Pour  $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ ,  $P_{m+1}(a)(a_1, \dots, a_m) = P(a_1, \dots, a_m, a) = 0$ . En particulier  $P_{m+1}(a)$  s'annule sur  $A^m - \{0\}$ , donc par hypothèse d'induction,  $\forall a \in A - \{0\}, P_{m+1}(a) = 0$ .

$P_{m+1} \in A[X_1, \dots, X_m][X_{m+1}]$  s'annulant sur la partie infinie  $A - \{0\}$  de l'anneau intègre  $A[X_1, \dots, X_m]$ , le même raisonnement que pour  $m = 1$  montre que  $P_{m+1}$  est nul.

On en déduit que  $P$  est nul, ce qui conclut la récurrence.

\*\*

(i): Supposons  $A$  fini. Soit  $P := \prod_{a \in A} (X_1 - a)$ .  $P \neq 0$  mais  $\lambda(P) = 0_{A^{A^n}}$ , donc  $\lambda$  n'est pas injectif.

Supposons maintenant  $A$  infini. Soit  $P \in \text{Ker}(\lambda)$ .

$P$  s'annule sur  $A^n - \{(0, \dots, 0)\}$ , donc d'après le lemme,  $P = 0$ . C'est-à-dire que  $\lambda$  est injectif.

(ii): Supposons  $\lambda$  surjectif, et faisons l'hypothèse, pour parvenir à une contradiction, que  $A$  est infini.

Soit  $P \in A[X_1, \dots, X_n]$  un antécédent de  $\mathbf{1}_{\{(0, \dots, 0)\}}$  par  $\lambda$ .  $P$  s'annule sur  $A^n - \{(0, \dots, 0)\}$ , donc d'après le lemme précédent,  $P = 0$ , mais alors on n'a pas  $\lambda(P) = \mathbf{1}_{\{(0, \dots, 0)\}}$  puisque  $\lambda(0)(0, 0, \dots, 0) = 0 \neq 1 = \mathbf{1}_{\{(0, \dots, 0)\}}(0, 0, \dots, 0)$ .

Donc si  $\lambda$  est surjectif,  $A$  est fini.

Supposons maintenant que  $A$  est fini.  $A$  est donc un corps. En effet, soit  $a \in A$  non nul. Par intégrité de  $A$ ,  $\mu_a = A \ni x \mapsto ax \in A$  est une application injective.  $A$  étant fini,  $\mu_a$  est surjective. En particulier, 1 admet un antécédent par  $\mu_a$ , qui n'est autre que l'inverse multiplicatif de  $a$ ; donc  $A$  est un corps.

Notons que  $A^{A^n}$  est un  $A$ -espace vectoriel de base  $(\mathbf{1}_{\{(a_1, \dots, a_n)\}})_{(a_1, \dots, a_n) \in A^n}$ . En effet, tout élément  $f \in A^{A^n}$  s'écrit de manière unique comme

$$f = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in A^n} f(a_1, \dots, a_n) \cdot \mathbf{1}_{\{(a_1, \dots, a_n)\}}.$$

Il suffit donc par linéarité de  $\lambda$  de montrer que les  $\mathbf{1}_{\{(a_1, \dots, a_n)\}}$  admettent des antécédents par  $\lambda$ . Pour  $a \in A$  et  $i \in \{1; \dots; n\}$ , on note  $L_i(a)$  le polynôme de Lagrange  $\prod_{a' \in A - \{a\}} (a - a')^{-1} (X_i - a')$ .

$\lambda(L_i(a)) = \mathbf{1}_{A \times \dots \times \{a\} \times \dots \times A}$ . Ainsi, pour  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $\lambda(\prod_{i=1}^n L_i(a_i)) = \mathbf{1}_{\{(a_1, \dots, a_n)\}}$ .

On en déduit que  $\lambda$  est surjectif.

\*\*\*

### Leçons:

142 - Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

### 3.3 Théorème d'Artin-Schreier en caractéristique nulle

Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle.

Si  $[\tilde{k} : k]$  est fini, alors  $k[\sqrt{-1}]$  est algébriquement clos.

\*\*\*

Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle *algébriquement clos*. Commençons par prouver que  $K$  n'admet aucun sous-corps de codimension  $p$  premier impair. Puisque les  $K/K'$  pour  $K'$  sous-corps de  $K$  de codimension finie sont galoisiennes, on pourra librement utiliser la correspondance de Galois et ses propriétés. On fixe une racine primitive quatrième de l'unité  $\xi_4$  dans  $K$ .

Supposons que  $K_p$  est un sous-corps de  $K$  de codimension  $p$  première. Soit  $G_p := \text{Gal}(K/K_p)$ .  $G_p$  est d'ordre premier  $p$  donc cyclique; on en fixe un générateur  $\sigma$ , de sorte que  $K_p$  est l'ensemble des points fixes de  $\sigma$ . Puisque  $p$  est premier, par correspondance de Galois,  $K_p$  n'a aucune extension algébrique non triviale de degré strictement inférieur à  $p$ . On en déduit que si  $\xi \neq 1$  est une racine  $p$ -ième de l'unité, annulée par  $X^{p-1} + \dots + 1$ ,  $K_p[\xi]$  est de codimension  $\leq p-1$  est triviale donc contient  $\xi$ . C'est-à-dire que  $K_p$  contient toutes les racines  $p$ -ièmes de l'unité.

Soit  $x \in K - K_p$ , soit  $\xi \in K_p$  une racine primitive  $p$ -ième de l'unité. On pose  $y = x + \xi\sigma(x) + \dots + \xi^{p-1}\sigma^{p-1}(x)$ .  $\xi\sigma(y) = \xi\sigma(x) + \dots + \xi^{p-1}\sigma^{p-1}(x) + x = y$ , d'où  $\sigma(y) = \xi^{-1}y \neq y$ .  $y$  n'est pas fixé par  $\sigma$  donc  $y \notin K_p$ . De plus,  $\xi^p\sigma(y^p) = \sigma(y^p) = y^p$ ; d'où  $y^p \in K_p$ .

Soit  $z$  une racine  $p$ -ième de  $y$  dans  $K$ .  $z^{p^2} = y^p \in K_p$ , donc  $\sigma(z^{p^2}) = \sigma(z)^{p^2} = z^{p^2}$ , donc  $\theta := \frac{\sigma(z)}{z}$  est une racine  $p^2$ -ième de l'unité. On n'a pas  $\theta^p = 1$ , sinon on aurait  $\sigma(z)^p = z^p = y$ , puis  $y \in K_p$ . Donc  $\theta^p$  est une racine  $p$ -ième de l'unité distincte de 1 (donc primitive), ce qui implique comme tout à l'heure que  $\theta^p \in K_p$ . On n'a pas  $\theta \in K_p$ , sinon on aurait  $\theta = \sigma(\theta) = \theta$  et  $\sigma(z) = \theta z$ , donc  $\sigma^p(z) = \theta^p z$ , puis  $\theta^p = 1$ . *Remarque:* dans le cas  $p = 2$ , cela montre que  $\xi_4 \notin K_2$ . Supposons maintenant  $p$  impair.

De même,  $\theta^p = \sigma(\theta^p) = \sigma(\theta)^p$ , donc  $\varphi := \frac{\sigma(\theta)}{\theta}$  est une racine  $p$ -ième de l'unité, de la forme  $\varphi = \theta^{kp}$  pour un certain entier  $k$ . Puisque  $\sigma(z) = \theta z$  et  $\sigma(\theta) = \theta\varphi = \theta^{kp+1}$ , on a  $z = \sigma^p(z) = \theta^{(kp+1)^{p-1} + \dots + (kp+1) + 1} z$ . Puisque  $\theta^{p^2} = 1$ , on peut réduire l'exposant de  $\theta$  modulo  $p^2$  et obtenir  $z = \theta^{p+kp(1+\dots+p-1)} z = \theta^{p+\frac{kp^2(p-1)}{2}} z$ .  $p$  est impair donc  $\frac{kp^2(p-1)}{2}$  est un multiple de  $p^2$ , et il reste  $z = \theta^p z$ , ce qui contredit  $\theta^p \neq 1$ . Donc  $K$  n'admet aucun sous-corps de codimension première impaire.

Supposons que  $K$  admet un sous-corps  $K'$  de codimension finie  $> 2$ ; on note  $G$  le groupe de Galois correspondant.  $|G|$  n'admet aucun diviseur premier impair, sinon d'après le théorème de Cauchy  $G$  admettrait un sous-groupe de

cardinal premier impair, et par correspondance de Galois,  $K$  admettrait un sous-corps de codimension première impaire. Donc  $G$  est un 2-groupe de cardinal  $[K : K'] > 2$ . Mais alors  $G$  admet un sous-groupe de cardinal 4, qui lui même admet un sous-groupe de cardinal 2, donc on dispose d'extensions  $K \supset K_2 \supset K_4$  de codimensions respectives 2 et 4 dans  $K$ . Comme on l'a remarqué,  $[K : K_2] = 2$  entraine que  $\xi_4 \notin K_2$ , donc  $\xi_4 \notin K_4$ , donc  $K_4[\xi_4]$  est de codimension  $\frac{[K:K_4]}{[K_4[\xi_4]:K_4]} = 2$  dans  $K$  et de même  $\xi_4 \notin K_4[\xi_4]$ : contradictoire.

Ainsi,  $K$  n'admet aucun sous-corps de codimension finie  $> 2$ .

Prouvons maintenant le théorème:

Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle avec  $[\tilde{k} : k] < +\infty$ . D'après ce qui précède,  $[\tilde{k} : k] \leq 2$ .

Si  $[\tilde{k} : k] = 1$ ,  $k$  est algébriquement clos et  $k[\sqrt{-1}] \cong k$ . Si  $[\tilde{k} : k] = 2$ , alors comme on l'a remarqué,  $k$  ne contient pas de racine quatrième primitive de l'unité, donc  $k[\sqrt{-1}]$  est de degré 2, donc  $k[\sqrt{-1}] \cong \tilde{k}$ .

\*\*\*

Leçons: **125** - Extensions de corps. Exemples et applications.

### 3.4 Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$

\*\*\*

#### Classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$ :

$\mathfrak{S}_4$  comprend 5 profils de permutations différents et donc cinq classes de conjugaisons: on compte l'identité  $id$ , six transpositions, huit 3-cycles, trois doubles transpositions, six 4-cycles.

Cherchons les 5 caractères irréductibles.

#### Caractères classiques

Hormis le caractère trivial  $\mathbf{1}$ , on connaît en général l'unique caractère de degré 1 non trivial de  $\mathfrak{S}_n$  donné par la signature  $\varepsilon$ , ainsi que le caractère  $\chi_s$  du nombre de points fixes retranché de 1, fourni par la représentation standard. Ce dernier caractère est toujours irréductible; on peut vérifier pour  $n = 4$  que  $\langle \chi_s | \chi_s \rangle = \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|} (1\chi_s(id)^2 + 6\chi_s(1\ 2)^2 + 8\chi_s(1\ 2\ 3)^2 + 3\chi_s((1\ 2)(3\ 4))^2 + 6\chi_s(1\ 2\ 3\ 4)^2) = \frac{(4-1)^2 + 6(2-1)^2 + 8(1-1)^2 + 3(0-1)^2 + 6(0-1)^2}{24} = 1$ .

Cela nous donne les trois lignes suivantes dans la table de caractères:

Les propriétés arithmétiques de la table de caractères permettent déjà de trouver les deux dernières lignes; mais on peut également chercher des représentations de  $\mathfrak{S}_4$  sous une forme géométrique.

#### Isométries positives du cube

$\mathfrak{S}_4$  est isomorphe au groupe  $\text{Isom}^+(C_3)$  des isométries positives (vues comme éléments de  $Gl_3(\mathbb{R})$ ) du cube  $C_3$  vu ici comme l'ensemble  $\{\varepsilon_1.e_1 + \varepsilon_2.e_2 + \varepsilon_3.e_3 \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1; 1\}\}$ ,  $e_1, e_2, e_3$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

En effet, toute isométrie du cube permute ses grandes diagonales, car leurs extrémités réalisent la plus grande distance entre sommets.

Cela donne, étant fixée une numérotation  $d_1, d_2, d_3, d_4$  des grandes diagonales du cube, un morphisme  $\varphi : \text{Isom}^+(C_3) \rightarrow \mathfrak{S}_4$  donné par la relation  $d_{\varphi(f)(i)} = f(d_i)$ .

On choisit ici  $d_1 \equiv \{(1, 1, 1); (-1, -1, -1)\}$ ;  $d_2 \equiv \{(1, -1, 1); (-1, 1, -1)\}$ ;  $d_3 \equiv \{(-1, -1, 1); (1, 1, -1)\}$ , et  $d_4 \equiv \{(-1, 1, 1); (1, -1, -1)\}$  (voir schéma). Une section de  $\varphi$  nous fournirait une représentation linéaire; on va montrer ici

que  $\varphi$  est un isomorphisme, ce qui fera de  $\varphi^{-1}$  une représentation linéaire de degré 3 de  $\mathfrak{S}_n$ .

Soit  $f \in \text{Ker}(\varphi)$ .  $f$  fixe les grandes diagonales, donc fixe ou intervertit leurs extrémités, qui sont deux-à-deux symétriques par rapport à  $(0, 0, 0)$ . On en déduit que chaque diagonale est incluse dans un des espaces propres  $E_1(f)$  et  $E_{-1}(f)$  de  $f$ . Puisque les familles constituées par les triplets d'extrémités sur des diagonales différentes sont des bases de  $\mathbb{R}^3$ , et que  $\det(f) = 1$  impose  $\dim(E_{-1}(f)) \in \{0; 2\}$ ,  $f$  intervertit zéro ou deux couples d'extrémités. Mais  $f$  ne peut en intervertir deux, sinon elle en fixerait deux, et on aurait  $\dim(E_1(f) \oplus E_{-1}(f)) \geq 2 + 2 > 3$ . Donc  $f$  en n'en intervertit aucun et les fixe tous, donc  $f$  fixe une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ , et  $f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est injectif.

Pour montrer que  $\varphi$  est surjectif, il suffit de montrer que les générateurs  $(1\ 2)$  et  $(1\ 2\ 3\ 4)$  admettent des antécédents. Or, la rotation d'angle  $\pi$  autour de la droite passant par  $(1, 0, 1)$  et  $(-1, 0, -1)$  est envoyée sur  $(1\ 2)$  tandis que la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $\mathbb{R}.e_3$  dans est envoyée sur  $(1\ 2\ 3\ 4)$ . Donc  $\varphi$  est un isomorphisme, et sa réciproque est une représentation linéaire de  $\mathfrak{S}_4$ .

Notons  $\chi_3$  le caractère associé à  $\varphi^{-1}$ .  $\chi_3(\text{id}) = 3$ ; et les deux égalités précédentes donnent  $\chi_3(1\ 2) = -1$  et  $\chi_3(1\ 2\ 3\ 4) = 1$ .  $\varphi^{-1}((1\ 2)(3\ 4))$  est d'ordre 2 et de déterminant 1, donc que sa trace vaut  $1 + (-1) + (-1) = -1$ .  $\varphi^{-1}(1\ 2\ 3)$  est d'ordre 3 donc sa trace vaut  $1 + j + j^2 = 0$ . On vérifie que  $\langle \chi_3 \mid \chi_3 \rangle = 1$ :  $\chi_3$  est irréductible.

On ajoute la ligne  $[3\ -1\ 0\ -1\ 1]$  à la table de caractères.

#### Permutation des axes du repère canonique de l'espace

Toute isométrie positive du cube, permute les axes portés par les vecteurs de la base canonique, puisque ce sont les axes médiateurs des faces. Cela fournit un morphisme  $\psi : \mathfrak{S}_4 \rightarrow \text{Gl}_3(\mathbb{R})$  donné par  $\forall i \in \{1; 2; 3\}, \psi(\sigma)(e_i) \in \mathbb{R}.e_{\varphi^{-1}(\sigma)(e_i)}$ . Le caractère compte le nombre de points fixes des  $\varphi^{-1}(\sigma)$  vus comme permutations de l'ensemble des trois axes.

Cette représentation se réduit à la somme directe de la représentation triviale sur  $\mathbb{R}.(e_1 + e_2 + e_3)$  et d'une sous-représentation  $\chi_2$  de degré 2 sur le noyau de  $(e_1 + e_2 + e_3)^*$ .

Cette dernière représentation est somme directe de ses sous-représentations irréductibles, qui ne peuvent être propres que si elles sont au nombre de deux et de degré 1. Elles sont donc parmi la représentation triviale et la signature.

Supposons  $\chi_2$  réductible. La remarque précédente indique que  $\chi_2(1\ 2\ 3) = 1 + 1 = 2$ , et donc que  $\varphi^{-1}(1\ 2\ 3)$  fixe trois des trois axes médiateurs de  $C_3$ . Or, comme on l'a vu, ses valeurs propres sont  $1, j$  et  $j^2$ , et elle admet seulement un sous-espace propre réel de dimension 1. C'est donc impossible:  $\chi_2$  est irréductible. On en déduit également  $\chi_2(1\ 2\ 3) = 0 - 1 = -1$ , car on sait déjà que  $\varphi^{-1}(1\ 2\ 3)$  fixe  $d_4$  qui n'est contenue dans aucun des axes.

$\varphi^{-1}(1\ 2)$  échange  $\mathbb{R}.e_1$  et  $\mathbb{R}.e_3$  en fixant  $\mathbb{R}.e_2$ , donc  $\chi_2(1\ 2) = 1 - 1 = 0$ .

$\varphi^{-1}(1\ 2\ 3\ 4)$  échange  $\mathbb{R}.e_1$  et  $\mathbb{R}.e_2$  en fixant  $\mathbb{R}.e_3$ , donc  $\chi((1\ 2\ 3\ 4)) = 1 - 1 = 0$ .  
On peut déterminer la valeur de  $\chi_2((1\ 2)(3\ 4))$  en utilisant l'irréductibilité de  $\chi_2$ :  $24 = 24 \langle \chi_2 \mid \chi_2 \rangle = 1 \times 2^2 + 6 \times 0^2 + 8 \times (-1)^2 + 6\chi_2((1\ 2)(3\ 4))^2 + 3 \times 0^2$ ,  
d'où  $\chi_2((1\ 2)(3\ 4)) = 2$ .

Voici enfin la table complète:

\*\*\*

Leçons: **104-** Groupes finis. Exemples et applications. **105 -** Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

### 3.5 Théorème de Mazur-Ulam

Soient  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces affines normés. Toute isométrie  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  surjective est affine.

\*\*\*

Commençons par montrer qu'une application  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est affine si elle préserve les milieux.

Soit  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  telle que pour  $A, B \in \mathcal{E}$  si  $I$  est le milieu de  $[AB]$  alors  $h(I)$  est le milieu de  $[h(A)h(B)]$ .

On montre par induction que  $h$  préserve les barycentres à coefficients dyadiques:

C'est immédiat pour les coefficients dyadiques entiers 0, 1. Soit  $n$  un entier naturel tel que  $h$  préserve les barycentres à coefficients dans  $\{\frac{k}{2^m} \mid 0 \leq m \leq n, 0 \leq k \leq 2^m\}$ .

Soit  $0 \leq k \leq 2^{n+1}$  un entier. Soient  $A, B \in \mathcal{E}$ . On pose  $X := \frac{k}{2^{n+1}}.A + (1 - \frac{k}{2^{n+1}}).B$ .

L'ensemble  $h$  est continue en tant qu'isométrie, donc pour  $A, B \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{R} \mapsto h(t.A + (1-t).B) - \lambda.h(A) + (1-\lambda).h(B)$  est continue, donc  $\{\lambda \in [0; 1] \mid \forall A, B \in \mathcal{E}, f(\lambda.A + (1-\lambda).B) = \lambda.h(A) + (1-\lambda).h(B)\}$  est une intersection de fermés de  $[0; 1]$  contenant chacun l'ensemble des éléments dyadiques de  $[0; 1]$ . Cet ensemble en contient donc l'adhérence, à savoir  $[0; 1]$ .

$h$  conserve les barycentres, elle est donc affine.

Soit  $f$  une isométrie surjective de  $E$ . En vertu de ce qui précède, il suffit de montrer que  $f$  préserve les milieux. On pourrait directement conclure si les milieux affines étaient exactement les milieux pour la distance, mais on peut voir avec la norme  $\|\cdot\|_1$  dans  $\mathbb{R}^2$  par exemple que ce n'est pas le cas: il peut y avoir une infinité de milieux pour la distance. Il faut donc employer des arguments plus géométriques.

On notera  $MN$  les distances dans  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ .

Pour  $M \in \mathcal{E}$ , on note  $s_M$  la symétrie centrale de  $\mathcal{E}$  de centre  $M$ . Pour  $X, Y \in \mathcal{E}$ ,  $s_M(X) = M + \overline{XM}$ , d'où  $Ms_M(X) = MX$ ,  $Xs_M(X) = 2Ms_M(X)$ , et  $s_M(X)s_M(Y) = XY$ .

En particulier,  $s_M$  est une isométrie involutive de  $\mathcal{E}$  de point fixe unique  $M$ . La symétrie centrale  $s_N$  de centre  $N \in \mathcal{F}$  possède bien entendu les mêmes propriétés.

Soient  $A, B \in \mathcal{E}$ . Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ . On note  $G$  l'ensemble des isométries surjectives de  $\mathcal{E}$  qui fixent  $A$  et  $B$ .



Notons que  $D := \{Ig(I) \mid g \in G\}$  est non vide ( $\text{id}_{\mathcal{E}} \in W$  donc  $0 \in D$ ) et majoré par  $2AI$  car pour  $g \in G$ ,  $Ag(I) = g(A)g(I) = AI$ , donc  $Ig(I) \leq IA + Ag(I) \leq 2AI$ . Soit  $\alpha := \sup(D)$ .

Soit  $g \in G$ .  $g^* := s_I g^{-1} s_I g$  est dans  $G$ , car  $g, g^{-1}$  fixent  $A$  et  $B$  tandis que  $s_I$  les intervertit. On en déduit que  $Ig^*(I) \leq \alpha$ .

Or  $2Ig(I) = g(I)s_I g(I) = Ig^{-1} s_I g(I) \stackrel{s_I}{=} Ig^*(I) \leq \lambda$ . On en déduit que  $\frac{\lambda}{2}$  est un majorant de  $D$ , donc  $0 \leq \lambda \leq \frac{\lambda}{2}$ :  $\lambda = 0$ .

C'est donc que tout élément de  $G$  fixe  $I$ .

On note  $I'$  le milieu de  $[f(A)f(B)]$ .  $f^* := s_I f^{-1} s_{I'} f$  est dans  $G$  puisque  $f^*(A) = s_I f^{-1} s_{I'} f(A) = s_I f^{-1}(f(B)) = s_I(B) = A$ , et de même  $f^*(B) = B$ .

Donc  $f^*(I) = I$ , ce qui entraîne que  $f s_I f^*(I) = s_{I'} f(I) = f(I)$ .

$f(I)$  est un point fixe de  $s_{I'}$  qui n'en admet qu'un:  $I'$ . Donc  $f(I) = I'$ :  $f$  préserve le milieu de  $[AB]$ , donc les milieux en général, donc  $f$  est affine.

\*\*\*

Leçons: 181 - Barycentre dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Leçons:  
**121** - Nombres premiers.

### 3.6 Polynômes caractéristique et minimal

Si  $k$  est un corps commutatif,  $E$  est un  $k$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\Pi_u$  et  $\chi_u$  ont les mêmes facteurs irréductibles.

Application:

\*\*\*

$\Pi_u$  divise  $\chi_u$  donc les facteurs irréductibles de  $\Pi_u$  sont des facteurs irréductibles de  $\chi_u$ .

Soit  $u$

-Pour la réciproque, on se place encore une fois dans  $M_n(K(X))$ .

On écrit  $\Pi_A = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  avec  $d = \deg(\Pi_A) > 0$ .

$$\begin{aligned} \Pi_A(X.I_n) - \Pi_A(A) &= \sum_{k=0}^d a_k ((X.I_n)^k - A^k) = \sum_{k=1}^d a_k ((X.I_n)^k - A^k) - \\ A^k &= \sum_{k=1}^d a_k (X^k.I_n - A^k) = (X.I_n - A) \sum_{k=1}^d a_k \sum_{p=0}^{k-1} X^p I_n A^{k-1-p}. \end{aligned}$$

On pose  $B = \sum_{k=1}^d a_k \sum_{p=0}^{k-1} X^p I_n A^{k-1-p}$ . Les coefficients de  $B$  sont dans  $K[X]$  donc  $\det(B)$  aussi.

Or  $\Pi_A(X.I_n) - \Pi_A(A) = (X.I_n - A)B$  donc  $\det(\Pi_A(X.I_n) - \Pi_A(A)) = \det(X.I_n - A) \det(B) = \chi_A \det(B)$ .

$\Pi_A(A) = 0$  donc il reste  $\det(\Pi_A(X.I_n)) = \chi_A \det(B)$ .

Comme pour tout entier naturel  $m$ ,  $I_n^m = I_n$ ,  $\Pi_A(X.I_n) = \Pi_A.I_n$ . (on voit ici  $\Pi_A$  comme un élément de  $K(X)$ .)

Ainsi  $\det(\Pi_A(X.I_n)) = \det(\Pi_A.I_n) = \Pi_A^n \det(I_n) = \Pi_A^n$ .

On a donc  $\chi_A \det(B) = \Pi_A^n$ ; en particulier,  $\chi_A$  **divise**  $\Pi_A^n$ .

Cela implique que les facteurs irréductibles de  $\chi_A$  sont des facteurs (irréductibles) de  $\Pi_A^n$ , donc de  $\Pi_A$ .

\*\*\*

Leçons:

- 123** - Corps finis.
- 125** - Extensions de corps.
- 153** - Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 155** - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

