ECOLE
DOCTORALE

Titre : Hyperséries et nombres surréels

Mots clés : nombres surréels, théorie des modèles, transséries

Résumé : Les *hyperséries* sont des transséries généralisées construites à partir d'exponentielles e^x et de logarithmes $\log x$ d'une variable positive et infiniment grande x, ainsi qu'à partir d'*itérateurs transfinis* $\mathrm{e}_{\omega^\alpha}$ et ℓ_{ω^α} de e^x et $\log x$ respectivement, pour tout ordinal α. Par exemple, les éléments $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_\omega, \ldots$ peuvent être vus comme des avatars formels de solutions régulières (en particulier monotones et analytiques) de l'équation d'Abel

$$E_{\omega^{\alpha+1}}(r+1) = E_{\omega^\alpha}(E_{\omega^{\alpha+1}}(r))$$

pour $r \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, où $E_1 = \exp$ est la fonction exponentielle réelle. De telles fonctions, exotiques en apparence, sont particulièrement intéressantes du fait qu'il est possible d'effectuer un "calcul hypersériel" simple et bien défini avec leur contrepartie formelles $\mathrm{e}_{\omega^\alpha}, \ell_{\omega^\alpha}$. Selon ces règles de calcul, il doit être possible de définir de façon naturelle des dérivations et lois de composition sur les hyperséries, de sorte qu'il en résulte des structures modérées des points de vue de la géométrie et de la théorie des modèles.

L'objectif de cette thèse est de définir une structure de corps d'hyperséries sur le corps $\mathbf{No}$ des *nombres surréels* de Conway. Nous prouvons que tout nombre surréel est représenté canoniquement par une hypersérie dans laquelle le nombre $\omega \in \mathbf{No}$ joue le rôle de la variable infinie x.

A cette fin, nous montrons comment définir les itérateurs transfinis L_{ω^α} et E_{ω^α} sur des corps généraux d'hyperséries, et nous prouvons que ces opérateurs peuvent être définis de façon naturelle sur les nombres surréels. Nous introduisons ensuite un moyen de représenter chaque nombre surréel comme une série formelle en ω impliquant les opérateurs L_{ω^α} et E_{ω^α}, des coefficients réels, et des sommes transfinies.

Title : Hyperseries and surreal numbers

Keywords : surreal numbers, model theory, transseries

Abstract : *Hyperseries* are generalized transseries that involve exponentials e^x, logarithms $\log x$ of a positive infinite variable x, as well as so-called transfinite iterators $\mathrm{e}_{\omega^\alpha}$ and ℓ_{ω^α} of e^x and $\log x$ respectively, for any ordinal index α. For instance, the elements $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_\omega, \ldots$ can be construed as a formal counterparts to regular (e.g. monotonous and analytic) solutions of Abel's equation

$$E_{\omega^{\alpha+1}}(r+1) = E_{\omega^\alpha}(E_{\omega^{\alpha+1}}(r))$$

for large enough $r \in \mathbb{R}$, where $E_1 = \exp$ is the real exponential function. Such seemingly exotic functions are of particular interest because their formal counterparts $\mathrm{e}_{\omega^\alpha}, \ell_{\omega^\alpha}$ are amenable to a simple "hyperserial calculus" according to which derivations and compositions of hyperseries are naturally defined, with tame properties.

The goal of the thesis is to define a structure of field of hyperseries on Conway's field $\mathbf{No}$ of *surreal numbers*. We show that each surreal number can be canonically represented as a hyperseries in which the number $\omega \in \mathbf{No}$ takes the role of the positive infinite variable x.

To that end, we show how transfinite iterators L_{ω^α} and E_{ω^α} can be defined on general fields of formal hyperseries, and we show that these functions can be defined in a natural way on surreal numbers. We then introduce a way to represent each surreal number as a formal series in ω involving the operators L_{ω^α} and E_{ω^α}, real numbers, and transfinite sums.

Institut Polytechnique de Paris
91120 Palaiseau, France

Université de Mons
B - 7000 Mons, Belgique