Logique catégorique

mars-avril 2021

Séminaire de logique de l'UMons

Bibliographie

Pour votre information:

MacLane: *Categories for the working mathematician*, 1969.

Cartier: *Logique, catégories et faisceaux* (Séminaire Bourbaki), 1979.

MacLane and Moerdijk: *Sheaves in geometry and logic*, 1992.

Caramello: Theories, Sites, Toposes, 2018.

Paradoxe d'Achille et de la tortue (par Lewis Caroll):

Paradoxe d'Achille et de la tortue (par Lewis Caroll):

A) Deux choses égales à une troisième sont égales entre elles.

B) Deux côtés dans un triangle donné sont de même longueur que le troisième.

C) Le triangle est équilatéral.

D) Si A et B sont vrais, alors C est vrai.

Paradoxe d'Achille et de la tortue (par Lewis Caroll):

A) Deux choses égales à une troisième sont égales entre elles.

B) Deux côtés dans un triangle donné sont de même longueur que le troisième.

C) Le triangle est équilatéral.

D) Si A et B sont vrais, alors C est vrai.

E) Si A et B et D sont vrais, alors C est vrai.

Achille et la tortue

Paradoxe d'Achille et de la tortue (par Lewis Caroll):

A) Deux choses égales à une troisième sont égales entre elles.

B) Deux côtés dans un triangle donné sont de même longueur que le troisième.

C) Le triangle est équilatéral.

D) Si A et B sont vrais, alors C est vrai.

$\vdots$

$\wp$) Si toutes les lettres de l'alphabet sauf C sont vraies, alors…

$\vdots$

Paradoxe d'Achille et de la tortue (par Lewis Caroll):

A) Deux choses égales à une troisième sont égales entre elles.

B) Deux côtés dans un triangle donné sont de même longueur que le troisième.

C) Le triangle est équilatéral.

D) Si A et B sont vrais, alors C est vrai.

$\vdots$

$\wp$) Si toutes les lettres de l'alphabet sauf C sont vraies, alors…

$\vdots$

D traduit-il le modus ponens ou l'implication (A et B) $\Longrightarrow C$?

Logique: niveaux de langage

On résout le paradoxe en distinguant des niveaux de langage:

Logique: niveaux de langage

On résout le paradoxe en distinguant des niveaux de langage:

Langage objet	Métalangage
$A \Rightarrow B$	$A \vdash B$: de A, l'on déduit B modus ponens
syntaxe	sémantique
formules mathématiques comme objets mathématiques (ensembles) e.g. Gödel: preuves $\equiv$ nombres	énoncés mathématiques: objets de communication mathématique Gödel: consistence d'une théorie $\equiv$ formule arithmétique
démonstrations comme objets mathématiques	démonstration comme pratique mathématique
combinatoire, algèbre	?

Logique: niveaux de langage

On résout le paradoxe en distinguant des niveaux de langage:

Langage objet	Métalangage
$A \Rightarrow B$	$A \vdash B$: de A, l'on déduit B modus ponens
syntaxe	sémantique
formules mathématiques comme objets mathématiques (ensembles) e.g. Gödel: preuves $\equiv$ nombres	énoncés mathématiques: objets de communication mathématique Gödel: consistence d'une théorie $\equiv$ formule arithmétique
démonstrations comme objets mathématiques	démonstration comme pratique mathématique
combinatoire, algèbre	?

Tarski: épistémologie moderne de la logique

Gödel, **Tarski**: énoncés métamathématiques comme conséquences de propriétés mathématiques de structure (théorèmes de complétude et d'incomplétude, d'indéfinissabilité de la vérité, de représentabilité des fonctions récursives)

Lawvere (1937-), **Tierney** (1937-2017), **Eleinberg** (1913-1998) and **MacLane** (1909-2005): utiliser le langage des catégories pour exploiter les relations entre langage et métalangage

Définition: Treillis

Un **treillis** (distributif) *est un ordre partiel* $(A, \leqslant)$ *tel que tout couple d'éléments de* A *admet une borne supérieure* $a \vee b$ *et une borne inférieure* $a \wedge b$*, avec* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$*.*

Définition: Treillis

Un **treillis** (distributif) *est un ordre partiel* $(A, \leqslant)$ *tel que tout couple d'éléments de* A *admet une borne supérieure* $a \vee b$ *et une borne inférieure* $a \wedge b$*, avec* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$*.*

- tout ordre total est un treillis
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, avec $x \vee y = x \cup y$ et $x \wedge y = x \cap y$.
- $(\mathbb{N}, |)$ avec $m \vee n = \mathrm{ppcm}(m, n)$ et $m \wedge n = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

Définition: Treillis

Un **treillis** (distributif) *est un ordre partiel* $(A, \leqslant)$ *tel que tout couple d'éléments de* A *admet une borne supérieure* $a \vee b$ *et une borne inférieure* $a \wedge b$*, avec* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$*.*

- tout ordre total est un treillis
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, avec $x \vee y = x \cup y$ et $x \wedge y = x \cap y$.
- $(\mathbb{N}, |)$ avec $m \vee n = \mathrm{ppcm}(m, n)$ et $m \wedge n = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

Définition: Algèbre de Boole

Une algèbre de Boole est un treillis A *avec un max* 1 *et un min* 0*, et tel que pour tout* $a \in A$*, il existe* $\bar{a} \in A$ *avec* $a \vee \bar{a} = 1$ *et* $a \wedge \bar{a} = 0$*.*

Définition: Treillis

Un **treillis** (distributif) *est un ordre partiel* $(A, \leqslant)$ *tel que tout couple d'éléments de* A *admet une borne supérieure* $a \vee b$ *et une borne inférieure* $a \wedge b$*, avec* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$*.*

- tout ordre total est un treillis
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, avec $x \vee y = x \cup y$ et $x \wedge y = x \cap y$.
- $(\mathbb{N}, |)$ avec $m \vee n = \mathrm{ppcm}(m, n)$ et $m \wedge n = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

Définition: Algèbre de Boole

Une algèbre de Boole est un treillis A *avec un max* 1 *et un min* 0*, et tel que pour tout* $a \in A$*, il existe* $\bar{a} \in A$ *avec* $a \vee \bar{a} = 1$ *et* $a \wedge \bar{a} = 0$*.*

Modèle canonique: $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ avec l'opération complémentaire.

Correspondance algèbres de Boole $\longleftrightarrow$ anneaux idempotents de caractéristique 2 (modèle canonique: $\mathbb{F}_2^X$)

La plus petite algèbre de Boole non triviale: $\mathbf{2} := (\{0;1\}, \leqslant)$:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

La plus petite algèbre de Boole non triviale: $\mathbf{2} := (\{0; 1\}, \leqslant)$:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Algèbre de Boole d'une théorie du premier ordre

Soit T une théorie du premier ordre sur un langage $\mathcal{L}$ et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules closes de $\mathcal{L}$ quotienté par la relation d'équivalence modulo T.

Alors $\mathcal{F}$ est une algèbre de Boole pour l'ordre

$$[\varphi] \leqslant [\psi] \quad \text{si et seulement si} \quad T \vdash (\varphi \Rightarrow \psi),$$

et le complément $\overline{[\varphi]} := [\neg\varphi]$. On a $\mathcal{F} \simeq \mathbf{2}$ si et seulement si T est complète, $\mathcal{F} \simeq \mathbf{1}$ si et seulement si T est contradictoire.

Définition: Algèbre de Heyting

Une **algèbre de Heyting** *est un treillis distributif* $\mathcal{H}$ *avec un max* 1 *et un min* 0, *et pour tous* $a, b \in \mathcal{H}$, *un élément* $a \Rightarrow b$ *de* $\mathcal{H}$ *avec*

$$\forall c \in \mathcal{H}, c \leqslant (a \Rightarrow b) \quad \text{si et seulement si} \quad (c \wedge a) \leqslant b.$$

$\mathcal{H}$ *est dite* **complète** *si elle est complète en tant qu'ensemble ordonné et si les bornes sup et inf sont distributives:* $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I} a_i \wedge b$ *et* $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I} a_i \wedge b$.

Algèbres de Heyting

Définition: Algèbre de Heyting

Une **algèbre de Heyting** *est un treillis distributif* $\mathcal{H}$ *avec un max* 1 *et un min* 0, *et pour tous* $a, b \in \mathcal{H}$, *un élément* $a \Rightarrow b$ *de* $\mathcal{H}$ *avec*

$$\forall c \in \mathcal{H}, c \leqslant (a \Rightarrow b) \quad \text{si et seulement si} \quad (c \wedge a) \leqslant b.$$

$\mathcal{H}$ *est dite* **complète** *si elle est complète en tant qu'ensemble ordonné et si les bornes sup et inf sont distributives:* $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I} a_i \wedge b$ *et* $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i \in I} a_i \wedge b$.

Exemples.

- Toute algèbre de Boole, avec $(a \Rightarrow b) := \bar{a} \vee b$.
- Si X est un espace topologique, alors sa topologie munie de l'inclusion est une algèbre de Heyting complète. Si U et V sont des ouverts, alors $U \Rightarrow V$ désigne

$$V \cup (\overset{\circ}{X \setminus U}).$$

On n'a pas de complémentaire car $U \cup (\overset{\circ}{X \setminus U}) \neq X$ en général.

On doit à Brouwer et Heyting la définition d'une logique « intuitioniste » qui diffère de la logique classique principalement en ce qu'elle rejette le tiers-exclu $\vdash (A \vee \neg A)$ ou de manière équivalente l'axiome de double négation $\neg\neg A \vdash A$.

On doit à Brouwer et Heyting la définition d'une logique « intuitioniste » qui diffère de la logique classique principalement en ce qu'elle rejette le tiers-exclu $\vdash (A \vee \neg A)$ ou de manière équivalente l'axiome de double négation $\neg\neg A \vdash A$.

Exemples de séquents en logique intuitioniste:

$$\frac{(A \vee B) \vdash C}{A \vdash C} \qquad \frac{(A \vee B) \vdash C}{B \vdash C} \qquad \frac{A \vdash C\,,\, B \vdash C}{(A \vee B) \vdash C}.$$

On doit à Brouwer et Heyting la définition d'une logique « intuitioniste » qui diffère de la logique classique principalement en ce qu'elle rejette le tiers-exclu $\vdash (A \vee \neg A)$ ou de manière équivalente l'axiome de double négation $\neg\neg A \vdash A$.

Exemples de séquents en logique intuitioniste:

$$\frac{(A \vee B) \vdash C}{A \vdash C} \qquad \frac{(A \vee B) \vdash C}{B \vdash C} \qquad \frac{A \vdash C \,,\, B \vdash C}{(A \vee B) \vdash C}.$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules du calcul des propositions quotienté par la relation $\varphi \equiv \psi$ si l'on a $\varphi \vdash \psi$ et $\psi \vdash \varphi$. Alors $\mathcal{F}$ est une algèbre de Heyting pour la relation

$$[\varphi] \leqslant [\psi] \quad \text{si} \quad \varphi \vdash \psi . \vdash \varphi \Rightarrow \psi$$

Définition: Catégorie

Une **catégorie** *est la donnée d'une collection* $\mathbf{C}$ *d'***objets***, pour chaque couple* c, c' *d'objets de* $\mathbf{C}$ *d'une collection* $\mathrm{Hom}(c, c')$ *de* **flèches** $c \to c'$*, d'un élément* $1_c \in \mathrm{Hom}(c, c)$*, et pour chaque* $c, c', c'' \in \mathbf{C}$ *d'une fonction*

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Hom}(c, c') \times \mathrm{Hom}(c', c'') &\longrightarrow \mathrm{Hom}(c, c'') \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

avec $g \circ 1_c = g$ *si* $c = c'$ *et* $f \circ 1_{c'} = f$ *si* $c' = c''$*.*

Définition: Catégorie

Une **catégorie** *est la donnée d'une collection* $\mathbf{C}$ *d'***objets***, pour chaque couple* c, c' *d'objets de* $\mathbf{C}$ *d'une collection* $\mathrm{Hom}(c, c')$ *de* **flèches** $c \to c'$*, d'un élément* $1_c \in \mathrm{Hom}(c, c)$*, et pour chaque* $c, c', c'' \in \mathbf{C}$ *d'une fonction*

$$\begin{array}{rcl} \circ\colon \mathrm{Hom}(c,c') \times \mathrm{Hom}(c',c'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(c,c'') \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

avec $g \circ 1_c = g$ *si* $c = c'$ *et* $f \circ 1_{c'} = f$ *si* $c' = c''$.

Deux flèches $f \in \mathrm{Hom}(c, c')$ et $g \in \mathrm{Hom}(c', c'')$ sont dites composables.

Exemples de catégories. Quelques exemples élémentaires:

1. $\mathbf{Ens}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications, avec composition des applications. $\mathrm{Hom}(X, Y)$: Y^X

Exemples de catégories. Quelques exemples élémentaires:

1. $\mathbf{Ens}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications, avec composition des applications. $\mathrm{Hom}(X,Y)$: Y^X

2. $\mathbf{Rel}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les relations binaires, avec composition des relations. $R \subseteq X \times Y$ $\quad R' \subseteq Y \times Z$ alors $R' \circ R = \{(a,b) : \exists c, (a,c) \in R, (c,b) \in R'\}$

Exemples de catégories (1)

Exemples de catégories. Quelques exemples élémentaires:

1. $\mathbf{Ens}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications, avec composition des applications. $\mathrm{Hom}(X,Y)$: Y^X
2. $\mathbf{Rel}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les relations binaires, avec composition des relations. $R \subseteq X \times Y$ $\quad R' \subseteq Y \times Z$ alors $R' \circ R = \{(a,b) : \exists c, (a,c) \in R, (c,b) \in R'\}$
3. $\mathbf{Mod}_T$: les objets sont les modèles d'une théorie du premier ordre T et les flèches sont les morphismes, avec composition des morphismes. $\rightarrow$ $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Ann}$, $\mathbf{K}$ (corps), *etc*...

Exemples de catégories. Quelques exemples élémentaires:

1. $\mathbf{Ens}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications, avec composition des applications. $\mathrm{Hom}(X,Y)\colon Y^X$
2. $\mathbf{Rel}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les relations binaires, avec composition des relations. $R \subseteq X \times Y \qquad R' \subseteq Y \times Z$ alors $R' \circ R = \{(a,b) : \exists c, (a,c) \in R, (c,b) \in R'\}$
3. $\mathbf{Mod}_T$: les objets sont les modèles d'une théorie du premier ordre T et les flèches sont les morphismes, avec composition des morphismes. $\rightarrow$ $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Ann}$, $\mathbf{K}$ (corps), *etc*...
4. $\vec{P}$ les objets sont les éléments d'un ordre partiel $(P, \leqslant)$ et pour tout $p, p' \in P$ on a

$$\mathrm{Hom}(p,p') = \{(p,p') : p \leqslant p'\},$$

avec composition $(p,p') \circ (p',p'') := (p,p'')$.

Exemples de catégories. Quelques exemples élémentaires:

1. $\mathbf{Ens}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications, avec composition des applications. $\mathrm{Hom}(X,Y)$: Y^X

2. $\mathbf{Rel}$: les objets sont les ensembles et les flèches sont les relations binaires, avec composition des relations. $R \subseteq X \times Y$ $\qquad R' \subseteq Y \times Z$ alors $R' \circ R = \{(a,b) : \exists c, (a,c) \in R, (c,b) \in R'\}$

3. $\mathbf{Mod}_T$: les objets sont les modèles d'une théorie du premier ordre T et les flèches sont les morphismes, avec composition des morphismes. $\rightarrow$ $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Ann}$, $\mathbf{K}$ (corps), *etc*...

4. $\vec{P}$ les objets sont les éléments d'un ordre partiel $(P, \leqslant)$ et pour tout $p, p' \in P$ on a

$$\mathrm{Hom}(p,p') = \{(p,p') : p \leqslant p'\},$$

avec composition $(p,p') \circ (p',p'') := (p,p'')$.

5. $\mathcal{O}(X)$: $\vec{P}$ où P est le treillis des ouverts de l'espace topologique X.

Exemple. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des catégories, soit $c_0 \in \mathbf{C}$.

- La catégorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ dont les objets sont ceux de $\mathbf{C}$ et les flèches sont les $f\colon c' \longrightarrow c$ où $f \in \mathrm{Hom}(c, c')$, et la composition est $(f \circ^{\mathrm{op}} g) := g \circ f$.

Exemple. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des catégories, soit $c_0 \in \mathbf{C}$.

- La catégorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ dont les objets sont ceux de $\mathbf{C}$ et les flèches sont les $f\colon c' \longrightarrow c$ où $f \in \mathrm{Hom}(c, c')$, et la composition est $(f \circ^{\mathrm{op}} g) := g \circ f$.
- La catégorie $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ dont les objets sont les couples (c, d) où $c \in \mathbf{C}$ et $d \in \mathbf{D}$, et les flèches sont les couples (f, g) où f (resp. g) est une flèche dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{D}$).

Exemple. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des catégories, soit $c_0 \in \mathbf{C}$.

- La catégorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ dont les objets sont ceux de $\mathbf{C}$ et les flèches sont les $f\colon c' \longrightarrow c$ où $f \in \mathrm{Hom}(c, c')$, et la composition est $(f \circ^{\mathrm{op}} g) := g \circ f$.
- La catégorie $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ dont les objets sont les couples (c, d) où $c \in \mathbf{C}$ et $d \in \mathbf{D}$, et les flèches sont les couples (f, g) où f (resp. g) est une flèche dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{D}$).
- La catégorie $\mathbf{C}/c_0$ dont les objets sont les flèches $c_0 \longrightarrow c'$ dans $\mathbf{C}$ et dont les flèches entre $f'\colon c_0 \longrightarrow c'$ et $f''\colon c_0 \longrightarrow c''$ sont les flèches $g\colon c' \longrightarrow c''$ dans $\mathbf{C}$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f''"'] & c' \arrow[d, "g"] \\ & c'' \end{tikzcd}$$

Foncteurs

Définition: foncteur

Soient $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *deux catégories. Un foncteur de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{D}$ *est la donnée d'une fonction* $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *et pour chaque* $c, c' \in \mathbf{C}$*, d'une fonction*

$$\begin{aligned} F_{\cdot}\colon \mathrm{Hom}(c, c') &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(c), F(c')) \\ g &\longmapsto F_g \end{aligned}$$

avec $F_{1_c} = 1_{F(c)}$ *pour tout* $c \in \mathbf{C}$ *et* $F_{g \circ f} = F_g \circ F_f$ *pour toutes flèches composables* f, g *dans* $\mathbf{C}$.

Définition: foncteur

Soient $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *deux catégories. Un foncteur de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{D}$ *est la donnée d'une fonction* $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ *et pour chaque* $c, c' \in \mathbf{C}$*, d'une fonction*

$$\begin{aligned} F_{\cdot}\colon \mathrm{Hom}(c,c') &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(c),F(c')) \\ g &\longmapsto F_g \end{aligned}$$

avec $F_{1_c} = 1_{F(c)}$ *pour tout* $c \in \mathbf{C}$ *et* $F_{g\circ f} = F_g \circ F_f$ *pour toutes flèches composables* f, g *dans* $\mathbf{C}$.

Exemples élémentaires.

- Le foncteur $\mathcal{P}\colon \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ associe à X l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de ses sous-ensembles, et a $f\colon X \longrightarrow Y$ l'application $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)\colon B \longmapsto f^{-1}(B)$.
- Le foncteur $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ qui envoie c sur c et $f\colon c \longrightarrow c'$ sur $f\colon c' \longrightarrow c$.
- Si $(P, \leqslant)$ est un treillis vu comme la catégorie P et $a \in P$, le foncteur $P \longrightarrow P$ qui à b associe $a \wedge b$ et qui a la flèche (b,c) associe la flèche $(a\wedge b, a \wedge c)$.

Foncteurs?

Exemples?. Les correspondances suivantes sont-elles des foncteurs?

- On a un foncteur $\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}_{\mathrm{ab}}$ qui a tout groupe associe son centre...?

Foncteurs?

Exemples?. Les correspondances suivantes sont-elles des foncteurs?

- On a un foncteur $\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}_{\mathrm{ab}}$ qui a tout groupe associe son centre...?
- On a un foncteur de $\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Grp}$ qui à tout ensemble Z associe le groupe $(\mathrm{Bij}(Z, Z), \circ)$ des applications bijectives $Z \longrightarrow Z$ avec la loi de composition...?

Exemples?. Les correspondances suivantes sont-elles des foncteurs?

- On a un foncteur $\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}_{\mathrm{ab}}$ qui a tout groupe associe son centre. . . ?
- On a un foncteur de $\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Grp}$ qui à tout ensemble Z associe le groupe $(\mathrm{Bij}(Z, Z), \circ)$ des applications bijectives $Z \longrightarrow Z$ avec la loi de composition. . . ?
- On a un foncteur de $\mathbf{K}_0$ vers $\mathbf{K}_0$ qui à tout corps de caractéristique nulle associe sa clôture algébrique. . . ?

Exemples?. Les correspondances suivantes sont-elles des foncteurs?

- On a un foncteur $\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}_{\mathrm{ab}}$ qui a tout groupe associe son centre...?
- On a un foncteur de $\mathbf{Ens}$ vers $\mathbf{Grp}$ qui à tout ensemble Z associe le groupe $(\mathrm{Bij}(Z, Z), \circ)$ des applications bijectives $Z \longrightarrow Z$ avec la loi de composition...?
- On a un foncteur de $\mathbf{K}_0$ vers $\mathbf{K}_0$ qui à tout corps de caractéristique nulle associe sa clôture algébrique...?
- Pour $c \in \mathbf{C}$, on a un foncteur $\mathrm{Hom}(c, \cdot) \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ qui a $c' \in \mathbf{C}$ associe $\mathrm{Hom}(c, c')$...?
- $f \colon c' \longrightarrow c''$ $\quad \mathrm{Hom}(c, f)$: $\mathrm{Hom}(c, c')$–>Hom(c,c'') $g \longmapsto f \circ g$
- Même chose pour $\mathrm{Hom}(\cdot, c') \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$...?

Catégories de foncteurs

Si $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *sont deux catégories, alors la collection* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *des foncteurs de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{D}$ *est une catégorie où les flèches entre* F *et* G *sont les* **transformations naturelles**:

les fonctions qui à chaque $c \in \mathbf{C}$ *associent une flèche* $\mu_c \in \mathrm{Hom}(F(c), G(c))$ *telle que pour tous* $c, c' \in \mathbf{C}$ *et* $f\colon c \longrightarrow c'$, *on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{F_f} & F(c') \\ \mu_c \downarrow & & \downarrow \mu_{c'} \\ G(c) & \xrightarrow[G_f]{} & G(c') \end{array}$$

La catégorie $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{Ens}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ est appelée **catégorie des pré-faisceaux** sur $\mathbf{C}$.

Catégories de foncteurs

Si $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *sont deux catégories, alors la collection* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *des foncteurs de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{D}$ *est une catégorie où les flèches entre* F *et* G *sont les* **transformations naturelles**:

les fonctions qui à chaque $c \in \mathbf{C}$ *associent une flèche* $\mu_c \in \mathrm{Hom}(F(c), G(c))$ *telle que pour tous* $c, c' \in \mathbf{C}$ *et* $f: c \longrightarrow c'$, *on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{F_f} & F(c') \\ \mu_c \downarrow & & \downarrow \mu_{c'} \\ G(c) & \xrightarrow[G_f]{} & G(c') \end{array}$$

La catégorie $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{Ens}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ est appelée **catégorie des pré-faisceaux** sur $\mathbf{C}$.

Par exemple, si $\mathbf{C} = \mathcal{O}(X)$, pour un espace topologique, alors $\mathbf{Ann}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ est la catégorie des pré-faisceaux sur X au sens de la géométrie algébrique. On a une sous-catégorie pleine $\mathbf{Sh}(X) \subseteq \mathbf{Ann}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ des **faisceaux**: pré-faisceaux $F: \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ann}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ avec conditions de recollements, et des schémas: certains faisceaux en anneaux locaux liés aux spectres d'anneaux commutatifs.

Catégories de foncteurs

Si $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *sont deux catégories, alors la collection* $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ *des foncteurs de* $\mathbf{C}$ *vers* $\mathbf{D}$ *est une catégorie où les flèches entre* F *et* G *sont les* **transformations naturelles**:

les fonctions qui à chaque $c \in \mathbf{C}$ *associent une flèche* $\mu_c \in \mathrm{Hom}(F(c), G(c))$ *telle que pour tous* $c, c' \in \mathbf{C}$ *et* $f\colon c \longrightarrow c'$, *on a le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{F_f} & F(c') \\ \mu_c \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mu_{c'} \\ G(c) & \xrightarrow[G_f]{} & G(c') \end{array}$$

La catégorie $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{Ens}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ est appelée **catégorie des pré-faisceaux** sur $\mathbf{C}$.

Par exemple, si $\mathbf{C} = \mathcal{O}(X)$, pour un espace topologique, alors $\mathbf{Ann}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ est la catégorie des pré-faisceaux sur X au sens de la géométrie algébrique. On a une sous-catégorie pleine $\mathbf{Sh}(X) \subseteq \mathbf{Ann}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ des **faisceaux**: pré-faisceaux $F\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ann}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ avec conditions de recollements, et des schémas: certains faisceaux en anneaux locaux liés aux spectres d'anneaux commutatifs.

Notion de faisceau pour les catégories?

Définition: adjonction

On dit qu'un foncteur $G\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *est adjoint à gauche à un foncteur* $D\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *si pour tout* $a \in \mathbf{A}$ *et* $b \in \mathbf{B}$, *il existe une bijection*

$$\varphi_{a,b}\colon \mathrm{Hom}\Big(\underbrace{G(a)}_{\text{gauche}}, b\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(a, \underbrace{D(b)}_{\text{droite}}\Big)$$

qui est « naturelle » en a, b.

Définition: adjonction

On dit qu'un foncteur $G\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ est adjoint à gauche à un foncteur $D\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ si pour tout $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$, il existe une bijection

$$\varphi_{a,b}\colon \mathrm{Hom}\Big(\underbrace{G(a)}_{\text{gauche}}, b\Big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(a, \underbrace{D(b)}_{\text{droite}}\Big)$$

qui est « naturelle » en a, b.

Si l'on a des flèches $f\colon a' \to a$ dans $\mathbf{A}$ et $g\colon b \to b'$ dans $\mathbf{B}$, alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(a, D(b)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f, D_g)} & \mathrm{Hom}(a', D(b')) \\ \varphi_{a,b} \Updownarrow & & \Updownarrow \varphi_{a',b'} \\ \mathrm{Hom}(G(a), b) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(G_f, g)]{} & \mathrm{Hom}(G(a'), b') \end{array}$$

où par exemple pour $h\colon a \to D(b)$ on a $\mathrm{Hom}(f, D_g)(h) = D_g \circ h \circ f$.

Soit $\mathbf{Rc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$ des corps ordonnés réels clos. On a une inclusion

$$\iota\colon \mathbf{Rc} \longrightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$$

et une correspondance $K^{\mathrm{rc}} \supseteq K$

$$(\cdot)^{\mathrm{rc}}\colon \mathbf{K}_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathbf{Rc}$$

donnée par la clôture réelle. Alors ι est adjoint à gauche à $(\cdot)^{\mathrm{rc}}$: étant donnés $K_0 \in \mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$ et $K_1 \in \mathbf{Rc}$ la donnée d'un plongement $K_0^{\mathrm{rc}} \longrightarrow K_1$ correspond bijectivement à celle d'un plongement $K_0 \longrightarrow \iota(K_1) = K_1$.

Exemples d'adjonctions

Soit $\mathbf{Rc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$ des corps ordonnés réels clos. On a une inclusion

$$\iota\colon \mathbf{Rc} \longrightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$$

et une correspondance $K^{\mathrm{rc}} \supseteq K$

$$(\cdot)^{\mathrm{rc}}\colon \mathbf{K}_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathbf{Rc}$$

donnée par la clôture réelle. Alors ι est adjoint à gauche à $(\cdot)^{\mathrm{rc}}$: étant donnés $K_0 \in \mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$ et $K_1 \in \mathbf{Rc}$ la donnée d'un plongement $K_0^{\mathrm{rc}} \longrightarrow K_1$ correspond bijectivement à celle d'un plongement $K_0 \longrightarrow \iota(K_1) = K_1$.

De même, les foncteurs groupe libre $\mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, corps de fractions: $\mathbf{Ann}_{\mathrm{int}} \longrightarrow \mathbf{K}_0$, henselizé $\mathbf{K}_{\mathrm{val}} \longrightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{val,hen}}$.

Soit $\mathbf{Rc}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$ des corps ordonnés réels clos. On a une inclusion

$$\iota\colon \mathbf{Rc} \longrightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$$

et une correspondance $K^{\mathrm{rc}} \supseteq K$

$$(\cdot)^{\mathrm{rc}}\colon \mathbf{K}_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \mathbf{Rc}$$

donnée par la clôture réelle. Alors ι est adjoint à gauche à $(\cdot)^{\mathrm{rc}}$: étant donnés $K_0 \in \mathbf{K}_{\mathrm{ord}}$ et $K_1 \in \mathbf{Rc}$ la donnée d'un plongement $K_0^{\mathrm{rc}} \longrightarrow K_1$ correspond bijectivement à celle d'un plongement $K_0 \longrightarrow \iota(K_1) = K_1$.

De même, les foncteurs groupe libre $\mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, corps de fractions: $\mathbf{Ann}_{\mathrm{int}} \longrightarrow \mathbf{K}_0$, henselizé $\mathbf{K}_{\mathrm{val}} \longrightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{val,hen}}$.

Soit $(P, \leqslant)$ un treillis, vu comme la catégorie P. Le foncteur $a \wedge \cdot$ admet un adjoint à droite $a \Rightarrow$ si et seulement si $(P, \leqslant)$ est une algèbre de Heyting.

Produits fibrés

Définition: Produit fibré dans $\mathbf{C}$

Le **produit fibré** *de* $f\colon c' \to c$ *et* $g\colon c'' \to c$ *est la donnée de* $p \in \mathbf{C}$ *et de deux flèches* $\pi_f\colon p \to c'$ *et* $\pi_g\colon p \to c''$ *telles que* (p, π_f, π_g) *est universel à faire commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{\pi_f} & c' \\ \pi_g \downarrow & & \downarrow f \\ c'' & \xrightarrow[g]{} & c \end{array}$$

Produits fibrés

Définition: Produit fibré dans $\mathbf{C}$

Le **produit fibré** *de* $f\colon c' \to c$ *et* $g\colon c'' \to c$ *est la donnée de* $p \in \mathbf{C}$ *et de deux flèches* $\pi_f\colon p \to c'$ *et* $\pi_g\colon p \to c''$ *telles que* (p, π_f, π_g) *est universel à faire commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "\rho_f"] \arrow[ddr, bend right, "\rho_g"'] & & \\
& p \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "g"'] & c' \arrow[d, "f"] \\
& c'' \arrow[r, "\pi_g"'] & c
\end{tikzcd}$$

Produits fibrés

Définition: Produit fibré dans $\mathbf{C}$

Le **produit fibré** *de* $f\colon c' \to c$ *et* $g\colon c'' \to c$ *est la donnée de* $p \in \mathbf{C}$ *et de deux flèches* $\pi_f\colon p \to c'$ *et* $\pi_g\colon p \to c''$ *telles que* (p, π_f, π_g) *est universel à faire commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\rho_f"] \arrow[ddr, bend right, "\rho_g"'] & & \\
& p \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "g"'] & c' \arrow[d, "f"] \\
& c'' \arrow[r, "\pi_g"'] & c
\end{tikzcd}$$

Produits fibrés

Définition: Produit fibré dans $\mathbf{C}$

Le **produit fibré** *de $f\colon c' \to c$ et $g\colon c'' \to c$ est la donnée de $p \in \mathbf{C}$ et de deux flèches $\pi_f\colon p \to c'$ et $\pi_g\colon p \to c''$ telles que (p, π_f, π_g) est universel à faire commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "\rho_f"] \arrow[dr, dashed, "\exists!"'] \arrow[ddr, bend right, "\rho_g"'] & & \\
& p \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "g"'] & c' \arrow[d, "f"] \\
& c'' \arrow[r, "\pi_g"'] & c
\end{tikzcd}$$

Je note $(p, \pi_f, \pi_g) = f \times g$.

Exemples de produits fibrés

Dans **Ens**, le produit fibré de $f\colon X \longrightarrow Z$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ est l'ensemble

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

avec les applications $\pi_f\colon (x, y) \longmapsto f(x)$ et $\pi_g\colon (x, y) \longmapsto g(y)$.

Dans $\mathbf{Ens}$, le produit fibré de $f\colon X \longrightarrow Z$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ est l'ensemble

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

avec les applications $\pi_f\colon (x, y) \longmapsto f(x)$ et $\pi_g\colon (x, y) \longmapsto g(y)$.

Le produit fibré ensembliste de groupes, espaces vectoriels, anneaux est un produit fibré pour les catégories correspondantes.

Exemples de produits fibrés

Dans $\mathbf{Ens}$, le produit fibré de $f\colon X \longrightarrow Z$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ est l'ensemble

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

avec les applications $\pi_f\colon (x, y) \longmapsto f(x)$ et $\pi_g\colon (x, y) \longmapsto g(y)$.

Le produit fibré ensembliste de groupes, espaces vectoriels, anneaux est un produit fibré pour les catégories correspondantes.

Dans un ordre partiel $(P, \leqslant)$, le produit fibré de $a \leqslant c$ et $b \leqslant c$ est la borne inférieure $a \wedge b$ de a et b si elle existe.

Exemples de produits fibrés

Dans $\mathbf{Ens}$, le produit fibré de $f\colon X \longrightarrow Z$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ est l'ensemble

$$\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

avec les applications $\pi_f\colon (x, y) \longmapsto f(x)$ et $\pi_g\colon (x, y) \longmapsto g(y)$.

Le produit fibré ensembliste de groupes, espaces vectoriels, anneaux est un produit fibré pour les catégories correspondantes.

Dans un ordre partiel $(P, \leqslant)$, le produit fibré de $a \leqslant c$ et $b \leqslant c$ est la borne inférieure $a \wedge b$ de a et b si elle existe.

Si $\mathbf{D}$ admet des produits fibrés, alors $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ admet des produits fibrés. En particulier, $\hat{\mathbf{C}}$ admet toujours des produits fibrés.

Sous-objets

Soit X un ensemble. Un sous-ensemble de X est l'image d'une injection $m\colon Y \rightarrowtail X$. Deux injections $m\colon Y \rightarrowtail X$ et $m'\colon Y' \rightarrowtail X$ peuvent avoir la même image $m(Y) = m'(Y)$.

On a alors une bijection $f\colon Y \to Y'\colon y \longmapsto (m')^{-1}(m(y))$ avec $m = m' \circ f$.

L'inclusion $m(Y) \subseteq m'(Y')$ se traduit par l'existence d'une injection $g\colon Y \to Y'$ avec $m = m' \circ g$.

Je rappelle que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est une algèbre de Boole.

Soit X un ensemble. Un sous-ensemble de X est l'image d'une injection $m\colon Y \rightarrowtail X$. Deux injections $m\colon Y \rightarrowtail X$ et $m'\colon Y' \rightarrowtail X$ peuvent avoir la même image $m(Y) = m'(Y)$.

On a alors une bijection $f\colon Y \to Y'\colon y \longmapsto (m')^{-1}(m(y))$ avec $m = m' \circ f$.

L'inclusion $m(Y) \subseteq m'(Y')$ se traduit par l'existence d'une injection $g\colon Y \to Y'$ avec $m = m' \circ g$.

Je rappelle que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est une algèbre de Boole.

Définition: sous-objet

*Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Un **mono** est une flèche $m\colon s \rightarrowtail c$ avec*

$$\forall g, h\colon c' \to s, (m \circ g = m \circ h \Longrightarrow g = h). \quad \text{(idée: injection)}$$

*Un **sous-objet** de $c \in \mathbf{C}$ est une classe d'équivalence de monos $m\colon s \rightarrowtail c$ et $m'\colon s' \rightarrowtail c$ pour l'existence d'un isomorphisme $f\colon s \to s'$ avec $m = m' \circ f$.*

La classe $\mathrm{Sub}(c)$ des sous-objets est ordonnée partiellement par $[m] \leqslant [m']$ s'il existe g avec $m = m' \circ g$.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie avec un objet terminal 1 et les produits fibrés.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie avec un objet terminal 1 et les produits fibrés.

Classificateur des sous-objets

Un **classificateur des sous-objets** *est un mono* $T\colon 1 \rightarrowtail \Omega$ *tel que pour tout mono* $m\colon c \rightarrowtail c'$ *dans* $\mathbf{C}$, *il existe une unique flèche* $\chi_m\colon a' \to \Omega$ *telle que le diagramme suivant est un produit fibré:*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, tail, "\top"] \\ a' \arrow[r, "\chi_m"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Cela revient à dire que $\mathrm{Sub}(a')$ *s'identifie à* $\mathrm{Hom}(a', \Omega)$.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie avec un objet terminal 1 et les produits fibrés.

Classificateur des sous-objets

Un **classificateur des sous-objets** *est un mono* $T\colon 1 \rightarrowtail \Omega$ *tel que pour tout mono* $m\colon c \rightarrowtail c'$ *dans* $\mathbf{C}$*, il existe une unique flèche* $\chi_m\colon a' \to \Omega$ *telle que le diagramme suivant est un produit fibré:*

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & 1 \\ m \downarrow & & \downarrow \top \\ a' & \xrightarrow{\chi_m} & \Omega \end{array}$$

Cela revient à dire que $\mathrm{Sub}(a')$ *s'identifie à* $\mathrm{Hom}(a', \Omega)$*.*

Dans $\mathbf{Ens}$, on a $1 = \{0\}$, et le classificateur des sous-objets $T\colon \{0\} \rightarrowtail \mathbf{2} = \{0; 1\}$. En effet, prendre $\chi_m(x) = 0$ si $x \in m(a)$ et $\chi_m(x) = 1$ si $x \notin m(a)$.

Cribles

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Cherchons si la catégorie des pré-faisceaux $\hat{\mathbf{C}}$ admet un classificateur des sous-objets. Un sous-objet de $F \in \hat{\mathbf{C}}$ est un foncteur $G \in \hat{\mathbf{C}}$ avec $G(c) \subseteq F(c)$ pour tout $c \in \mathbf{C}$ et $G_h \restriction G(c) = F_h \restriction G(c)$ pour toute $h\colon c \to c'$.

Cribles

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Cherchons si la catégorie des pré-faisceaux $\hat{\mathbf{C}}$ admet un classificateur des sous-objets. Un sous-objet de $F \in \hat{\mathbf{C}}$ est un foncteur $G \in \hat{\mathbf{C}}$ avec $G(c) \subseteq F(c)$ pour tout $c \in \mathbf{C}$ et $G_h \upharpoonright G(c) = F_h \upharpoonright G(c)$ pour toute $h\colon c \to c'$.

Définition: cribles

*Pour $c \in \mathbf{C}$, un **crible** sur c est un ensemble S de flèches $c' \to c$ où c' varie dans $\mathbf{C}$ tel que pour toutes $f\colon c' \to c$ dans S et $g\colon c'' \to c'$ dans $\mathbf{C}$, on a $f \circ g \in S$.*

Exemple (Connes): crible d'Eratosthène sur la catégorie $\{\bullet\}$ avec $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = \mathbb{N}^{\times}$.

Si S est un crible sur c et $f \in \mathrm{Hom}(c', c)$ alors $S \cdot f := \{g\colon c'' \to c' | f \circ g \in S\}$ est un crible sur c'.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Cherchons si la catégorie des pré-faisceaux $\hat{\mathbf{C}}$ admet un classificateur des sous-objets. Un sous-objet de $F \in \hat{\mathbf{C}}$ est un foncteur $G \in \hat{\mathbf{C}}$ avec $G(c) \subseteq F(c)$ pour tout $c \in \mathbf{C}$ et $G_h \restriction G(c) = F_h \restriction G(c)$ pour toute $h: c \to c'$.

Définition: cribles

Pour $c \in \mathbf{C}$, un **crible** *sur c est un ensemble S de flèches $c' \to c$ où c' varie dans $\mathbf{C}$ tel que pour toutes $f: c' \to c$ dans S et $g: c'' \to c'$ dans $\mathbf{C}$, on a $f \circ g \in S$.*

Exemple (Connes): crible d'Eratosthène sur la catégorie $\{\bullet\}$ avec $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = \mathbb{N}^\times$.

Si S est un crible sur c et $f \in \mathrm{Hom}(c', c)$ alors $S \cdot f := \{g: c'' \to c' | f \circ g \in S\}$ est un crible sur c'.

Proposition

Le foncteur des cribles $\Omega: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ donné par

$$\begin{aligned} \Omega(c) &:= \{\text{cribles sur } c\} \\ \Omega_f &:= S \longmapsto S \cdot f \end{aligned}$$

est le classificateur de sous-objets pour $\hat{\mathbf{C}}$, où $\top: 1 \rightarrowtail \Omega$ est donné par $c \mapsto \{f: c \to c' | c' \in \mathbf{C}^{\mathrm{op}}\}$.

Proposition

Soit $P \in \hat{\mathbf{C}}$. *L'ensemble partiellement ordonné* $(\mathrm{Sub}(P), \leqslant)$ *est une algèbre de Heyting.*

Structure de $\mathrm{Sub}(P)$

Proposition

Soit $P \in \hat{\mathbf{C}}$. L'ensemble partiellement ordonné $(\mathrm{Sub}(P), \leqslant)$ est une algèbre de Heyting.

Idée: Pour deux sous-foncteurs G, H, on a deux sous-foncteurs

$$\begin{aligned} G \wedge H \ &: \ c \longmapsto G(c) \cap H(c), \ (f\colon c \to c') \mapsto P_f \restriction G(c) \cap H(c) \quad \text{et} \\ G \vee H \ &: \ c \longmapsto G(c) \cup H(c), \ (f\colon c \to c') \mapsto P_f \restriction G(c) \cup H(c). \end{aligned}$$

Une implication $G \Rightarrow H$:

$$(G \Rightarrow H)(c) = \{x \in P(c) | \forall f\colon c' \to c, (P_f(x) \in G(c') \Longrightarrow P_f(x) \in H(c'))\}.$$

Proposition

Soit $P \in \hat{\mathbf{C}}$. L'ensemble partiellement ordonné $(\mathrm{Sub}(P), \leqslant)$ est une algèbre de Heyting.

Idée: Pour deux sous-foncteurs G, H, on a deux sous-foncteurs

$$\begin{aligned} G \wedge H &: c \longmapsto G(c) \cap H(c),\ (f : c \to c') \mapsto P_f \upharpoonright G(c) \cap H(c) \quad \text{et} \\ G \vee H &: c \longmapsto G(c) \cup H(c),\ (f : c \to c') \mapsto P_f \upharpoonright G(c) \cup H(c). \end{aligned}$$

Une implication $G \Rightarrow H$:

$$(G \Rightarrow H)(c) = \{x \in P(c) | \forall f : c' \to c, (P_f(x) \in G(c') \Longrightarrow P_f(x) \in H(c'))\}.$$

Si l'on avait juste demandé $(G \Rightarrow H)(c) = (G(c) \Rightarrow H(c)) = H(c) \cup (P(c) \setminus G(c))$, on n'obtiendrait pas de sous-foncteur en général.

Quantificateurs

Soient X, Y des ensembles et $\pi\colon X \times Y \to Y$ la projection naturelle. Si $S \subseteq X \times Y$, alors

- on a un ensemble $\exists_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels qu'il existe $x \in X$ tels que $(x, y) \in S$ (c'est $\pi(S)$).
- on a un ensemble $\forall_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels que pour tout $x \in X$, on a $(x, y) \in S$.

Quantificateurs

Soient X, Y des ensembles et $\pi\colon X \times Y \to Y$ la projection naturelle. Si $S \subseteq X \times Y$, alors

- on a un ensemble $\exists_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels qu'il existe $x \in X$ tels que $(x, y) \in S$ (c'est $\pi(S)$).
- on a un ensemble $\forall_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels que pour tout $x \in X$, on a $(x, y) \in S$.

On voit $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(Y)$ comme les catégories ordre partiel $\overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}$ pour l'inclusion. On a alors trois foncteurs:

$$\begin{aligned}
\exists_\pi &: \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}, \\
\forall_\pi &: \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}, \\
\pi^* &: \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \quad A \longmapsto \pi^{-1}(A) = X \times A.
\end{aligned}$$

Les foncteurs $\exists_\pi$ et $\forall_\pi$ sont respectivement adjoints à gauche et à droite de π.

Quantificateurs

Soient X, Y des ensembles et $\pi : X \times Y \to Y$ la projection naturelle. Si $S \subseteq X \times Y$, alors

- on a un ensemble $\exists_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels qu'il existe $x \in X$ tels que $(x, y) \in S$ (c'est $\pi(S)$).
- on a un ensemble $\forall_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels que pour tout $x \in X$, on a $(x, y) \in S$.

On voit $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(Y)$ comme les catégories ordre partiel $\overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}$ pour l'inclusion. On a alors trois foncteurs:

$$\begin{aligned}
\exists_\pi &: \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}, \\
\forall_\pi &: \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}, \\
\pi^* &: \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \quad A \longmapsto \pi^{-1}(A) = X \times A.
\end{aligned}$$

Les foncteurs $\exists_\pi$ et $\forall_\pi$ sont respectivement adjoints à gauche et à droite de π.

Théorème (Lawvere)

Etant donnée une application $f : X \longrightarrow Z$, le foncteur préimage $f^* : \mathcal{P}(Z) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ admet un adjoint à gauche $\exists_f$ et un adjoint à droite $\forall_f$.

Soient X, Y des ensembles et $\pi\colon X \times Y \to Y$ la projection naturelle. Si $S \subseteq X \times Y$, alors

- on a un ensemble $\exists_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels qu'il existe $x \in X$ tels que $(x, y) \in S$ (c'est $\pi(S)$).
- on a un ensemble $\forall_\pi(S)$ des $y \in Y$ tels que pour tout $x \in X$, on a $(x, y) \in S$.

On voit $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(Y)$ comme les catégories ordre partiel $\overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}$ pour l'inclusion. On a alors trois foncteurs:

$$\begin{aligned}
\exists_\pi &: \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}, \\
\forall_\pi &: \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)}, \\
\pi^* &: \overrightarrow{\mathcal{P}(Y)} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}(X \times Y)} \quad A \longmapsto \pi^{-1}(A) = X \times A.
\end{aligned}$$

Les foncteurs $\exists_\pi$ et $\forall_\pi$ sont respectivement adjoints à gauche et à droite de π.

Théorème (Lawvere)

Etant donnée une application $f\colon X \longrightarrow Z$, le foncteur préimage $f^*\colon \mathcal{P}(Z) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ admet un adjoint à gauche $\exists_f$ et un adjoint à droite $\forall_f$.

Cela se généralise dans $\hat{\mathbf{C}}$ au foncteur $f^*\colon \mathrm{Sub}(c') \longrightarrow \mathrm{Sub}(c)$ donné par toute flèche $f\colon c \to c'$.

Calculs des séquents sur une singature Σ avec plusieurs types $A_i, i \in I$, et les règles:

i. introductions et éliminations des conjonctions et disjonctions finies
ii. conjonctions infinies
iii. disjonctions infinies
iv. implication
v. quantificateur existentiel
vi. quantificateur universel
vii. distributivité conjonction disjonction (infinies le cas échéant)
viii. axiome de Frobenius: $(\varphi \wedge \exists y(\psi)) \vdash \exists y(\varphi \wedge \psi)$
ix. tiers exclus

Calculs des séquents sur une singature Σ avec plusieurs types $A_i, i \in I$, et les règles:

i. introductions et éliminations des conjonctions et disjonctions finies

ii. conjonctions infinies

iii. disjonctions infinies

iv. implication

v. quantificateur existentiel

vi. quantificateur universel

vii. distributivité conjonction disjonction (infinies le cas échéant)

viii. axiome de Frobenius: $(\varphi \wedge \exists y(\psi)) \vdash \exists y(\varphi \wedge \psi)$

ix. tiers exclus

logique classique	**logique intuitioniste**	**logique géométrique**
toutes les règles finitaires	toutes les règles finitaires sauf ix	i, iii, v, vii et viii.
algèbre de Boole	algèbre de Heyting	treillis distributif ...

Sémantique catégorique (1)

Une Σ-structure M dans $\hat{\mathbf{C}}$ est la donnée de:

- un objet $M(A)$ de $\hat{\mathbf{C}}$ pour tout type A
- une flèche $M_f \colon M(A_1) \times \cdots \times M(A_n) \longrightarrow M(B)$ pour tout symbole de fonction $f \colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$,
- un sous-objet $M_R \colon M(R) \hookrightarrow M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ pour tout symbole de relation $R \subseteq A_0 \times \cdots \times A_n$.

Une Σ-structure M dans $\hat{\mathbf{C}}$ est la donnée de:

- un objet $M(A)$ de $\hat{\mathbf{C}}$ pour tout type A
- une flèche $M_f\colon M(A_1)\times\cdots\times M(A_n)\longrightarrow M(B)$ pour tout symbole de fonction $f\colon A_1\times\cdots\times A_n\longrightarrow B$,
- un sous-objet $M_R\colon M(R)\hookrightarrow M(A_1)\times\cdots\times M(A_n)$ pour tout symbole de relation $R\subseteq A_0\times\cdots\times A_n$.

On peut ainsi interpréter inductivement les termes en composant les flèches. $x\colon A\ M(A)\rightarrow M(A)$.

Soit $\varphi=R(t_1,\ldots,t_p)$ une formule atomique, où chaque t_i est de type $t_i\colon A_1\times\cdots\times A_n\rightarrow B_i$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & M(R) \\ & & \big\downarrow M_R \\ M(A_1)\times\cdots\times M(A_n) & \xrightarrow[M_{t_1}\times\cdots\times M_{t_p}]{} & M(B_1)\times\cdots\times M(B_p). \end{array}$$

Une Σ-structure M dans $\hat{\mathbf{C}}$ est la donnée de:

- un objet $M(A)$ de $\hat{\mathbf{C}}$ pour tout type A
- une flèche $M_f \colon M(A_1) \times \cdots \times M(A_n) \longrightarrow M(B)$ pour tout symbole de fonction $f \colon A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$,
- un sous-objet $M_R \colon M(R) \hookrightarrow M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ pour tout symbole de relation $R \subseteq A_0 \times \cdots \times A_n$.

On peut ainsi interpréter inductivement les termes en composant les flèches. $x \colon A \ M(A) \to M(A)$.

Soit $\varphi = R(t_1, \ldots, t_p)$ une formule atomique, où chaque t_i est de type $t_i \colon A_1 \times \cdots \times A_n \to B_i$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M(\varphi) & \longrightarrow & M(R) \\ {\scriptstyle M_\varphi} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle M_R} \\ M(A_1) \times \cdots \times M(A_n) & \xrightarrow[M_{t_1} \times \cdots \times M_{t_p}]{} & M(B_1) \times \cdots \times M(B_p). \end{array}$$

On définit M_φ comme le produit fibré du diagramme. Dans $\mathbf{Ens} = \hat{\mathbf{1}}$ avec l'interprétation classique: $M(\varphi)$ est l'ensemble des $(a_1, \ldots, a_n)$ où $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ est satisfaite.

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Si $\varphi = \psi \wedge \phi$, alors l'interprétation est donnée par l'inf des sous-objets, ou encore le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} M(\varphi) & \rightarrowtail & M(\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(\phi) & \rightarrowtail & M(A_1) \times \cdots \times M(A_n). \end{array}$$

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Si $\varphi = \psi \vee \phi$, alors l'interprétation est donnée par le sup des sous-objets $M(\varphi)$ et $M(\psi)$.

Sémantique catégorique (2)

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Similairement $\psi \Rightarrow \phi$ est donnée par $M(\psi) \Rightarrow M(\phi)$, et $\neg\psi$ par $M(\psi) \Rightarrow \min(\mathrm{Sub}(c))$.

Sémantique catégorique (2)

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Si $\varphi = \exists y\, \psi$ où y est de type B, alors on considère la projection

$$\pi\colon c \times M(B) \to c$$

et on pose $M(\varphi) := \exists_\pi(M(\psi))$.

Sémantique catégorique (2)

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Si $\varphi = \forall y\, \psi$ où y est de type B, alors on considère la projection

$$\pi : c \times M(B) \to c$$

et on pose $M(\varphi) := \forall_\pi(M(\psi))$.

Sémantique catégorique (2)

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Si $\varphi = \bigvee_{i \in I} \psi_i$, alors $M(\varphi) = \sup_{i \in I} M(\psi_i)$.

Si $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i$, alors $M(\varphi) = \inf_{i \in I} M(\psi_i)$.

Sémantique catégorique (2)

Soit $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ une Σ-formule. On définit l'interprétation de φ comme le sous-objet

$$M(\varphi) \rightarrowtail M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$$

de $c := M(A_1) \times \cdots \times M(A_n)$ inductivement.

Si $\varphi = \bigvee_{i \in I} \psi_i$, alors $M(\varphi) = \sup_{i \in I} M(\psi_i)$.

Si $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i$, alors $M(\varphi) = \inf_{i \in I} M(\psi_i)$.

Définition: satisfaction des séquents

Soit M une Σ-structure sur $\hat{\mathbf{C}}$. On dit que le séquent $\varphi \vdash \psi$ est **satisfait** *dans M si l'on a*

$$M(\varphi) \leqslant M(\psi) \quad \text{dans l'ensemble des sous-objets } \mathrm{Sub}(c) \text{ correspondant.}$$

Sémantique catégorique (3)

Soit $\mathbf{D}$ une catégorie et M une Σ-structure sur $\mathbf{D}$. Quelles conditions sur $\mathbf{D}$ pour que M interprète les théories classiques, intuitionistes ou géométriques sur Σ?

Type de catégorie	**Logique**
booléenne	classique
de Heyting	intuitioniste
géométrique	géométrique

$\hat{\mathbf{C}}$ est une catégorie de Heyting (complète),

$\mathbf{Ens}$ est une catégorie booléenne,

$\mathbf{Sh}(X)$ (faisceaux d'ensembles sur X) est une catégorie géométrique.

Théorème de complétude

Les séquents prouvables par $\mathbb{T}$ dans la logique classique / intuitioniste / géométrique sont ceux qui sont satisfaits par toute interprétation de Σ dans une catégorie classique / intuitioniste / géométrique qui satisfait les axiomes de $\mathbb{T}$.

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires...

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires...
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires…
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.
- La théorie des graphes connexes sur un ensemble de sommets fixés.

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires...
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.
- La théorie des graphes connexes sur un ensemble de sommets fixés.
- Les théorie des groupes archimédiens et corps archimédiens.

Le cas géométrique

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires...
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.
- La théorie des graphes connexes sur un ensemble de sommets fixés.
- Les théorie des groupes archimédiens et corps archimédiens.
- Les théories des ensembles finis, groupes finis, anneaux finis...

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires...
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.
- La théorie des graphes connexes sur un ensemble de sommets fixés.
- Les théorie des groupes archimédiens et corps archimédiens.
- Les théories des ensembles finis, groupes finis, anneaux finis...
- La théorie des extensions algébriques d'un corps donné F.

Le cas géométrique

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires…
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.
- La théorie des graphes connexes sur un ensemble de sommets fixés.
- Les théorie des groupes archimédiens et corps archimédiens.
- Les théories des ensembles finis, groupes finis, anneaux finis…
- La théorie des extensions algébriques d'un corps donné F.

Une théorie classique sur Σ n'est pas nécessairement géométrique (ex: Peano). En revanche, on a:

Le cas géométrique

Exemples. Les théories suivantes sont géométriques:

- La théorie vide $\varnothing$ sur Σ et la théorie contradictoire $\{\top \vdash \bot\}$ sur Σ.
- Les théories des groupes, groupes abéliens, groupes sans torsion, anneaux, anneaux locaux, corps, corps ordonnés, corps algébriquement clos, graphes, ordres partiels ou linéaires...
- Les théories des groupes de torsions et anneaux / corps de caractéristique finie.
- La théorie des graphes connexes sur un ensemble de sommets fixés.
- Les théorie des groupes archimédiens et corps archimédiens.
- Les théories des ensembles finis, groupes finis, anneaux finis...
- La théorie des extensions algébriques d'un corps donné F.

Une théorie classique sur Σ n'est pas nécessairement géométrique (ex: Peano). En revanche, on a:

Proposition (Makkai, Reyes)

Une théorie classique du premier ordre $\mathbb{T}$ sur Σ admet une **morleyisation** $\mathbb{T}_{\mathrm{geom}}$*: une théorie sur une extension Σ_{geom} de Σ telle que les modèles classiques de $\mathbb{T}$ correspondent aux modèles de $\mathbb{T}_{\mathrm{geom}}$ dans $\mathbf{Ens}$.*

Idée: « catégorifier » la notion de recouvrements d'ouverts.

Idée: « catégorifier » la notion de recouvrements d'ouverts.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Une **topologie de Grothendieck** *sur $\mathbf{C}$ est la donnée pour chaque $c \in \mathbf{C}$ d'une collection $J(c)$ de cribles sur c avec:*

- *Le crible maximal $\{f : c' \to c | c' \in \mathbf{C}\}$ est un élément de $J(c)$.*
- *Pour $S \in J(c)$ et $f : c' \to c$, on a $S \cdot f \in J(c')$.*
- *Pour $S \in J(c)$ et T crible sur c, si $T \cdot f \in J(\mathrm{dom}\, f)$ pour toute $f \in T$, alors $T \in J(c)$.*

On dit que $(\mathbf{C}, J)$ est un **site**.

Idée: « catégorifier » la notion de recouvrements d'ouverts.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Une **topologie de Grothendieck** *sur $\mathbf{C}$ est la donnée pour chaque $c \in \mathbf{C}$ d'une collection $J(c)$ de cribles sur c avec:*

- *Le crible maximal $\{f : c' \to c | c' \in \mathbf{C}\}$ est un élément de $J(c)$.*
- *Pour $S \in J(c)$ et $f : c' \to c$, on a $S \cdot f \in J(c')$.*
- *Pour $S \in J(c)$ et T crible sur c, si $T \cdot f \in J(\mathrm{dom}\, f)$ pour toute $f \in T$, alors $T \in J(c)$.*

On dit que $(\mathbf{C}, J)$ est un **site**.

Exemple: $\mathbf{C} = \overrightarrow{\mathcal{O}(X)}$ pour un espace topologique X, alors on peut prendre la topologie J_X:

$$J_X(U) = \left\{ \{(U_i, U) \in \mathrm{Hom}(U_i, U) | \, i \in I\} \mid U = \bigcup_{i \in I} U_i \right\}.$$

Idée: « catégorifier » la notion de recouvrements d'ouverts.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Une **topologie de Grothendieck** *sur $\mathbf{C}$ est la donnée pour chaque $c \in \mathbf{C}$ d'une collection $J(c)$ de cribles sur c avec:*

- *Le crible maximal $\{f : c' \to c | c' \in \mathbf{C}\}$ est un élément de $J(c)$.*
- *Pour $S \in J(c)$ et $f : c' \to c$, on a $S \cdot f \in J(c')$.*
- *Pour $S \in J(c)$ et T crible sur c, si $T \cdot f \in J(\mathrm{dom}\, f)$ pour toute $f \in T$, alors $T \in J(c)$.*

On dit que $(\mathbf{C}, J)$ est un **site**.

Exemple: $\mathbf{C} = \overrightarrow{\mathcal{O}(X)}$ pour un espace topologique X, alors on peut prendre la topologie J_X:

$$J_X(U) = \left\{ \{(U_i, U) \in \mathrm{Hom}(U_i, U) | i \in I\} \mid U = \bigcup_{i \in I} U_i \right\}.$$

On définit la sous-catégorie $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ de $\hat{\mathbf{C}}$ des pré-faisceaux P ayant la propriété de recollement:

Pour tous $S \in J(c)$ et $x_f \in J(\mathrm{dom}\, f)$, $f \in S$ est une famille avec $P(g)(x_f) = x_{f \circ g}$ pour toute $g : c' \to \mathrm{dom}\, f$ dans $\mathbf{C}$, alors il existe un unique x dans $P(c)$ avec $x_f = P_f(x)$ pour toute $f \in S$.

Définition: topos

Un topos est une catégorie $\mathbf{T}$ *équivalente à un* $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ *pour un certain site* $(\mathbf{C}, J)$, *appelé site de définition de* $\mathbf{T}$.

Topos

Définition: topos

Un topos est une catégorie $\mathbf{T}$ *équivalente à un* $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ *pour un certain site* $(\mathbf{C}, J)$, *appelé site de définition de* $\mathbf{T}$.

Un topos est une catégorie géométrique. Quelques exemples:

- $\mathbf{Ens} \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{O}_{\{*\}})$ est un topos.
- Plus généralement $\mathbf{Sh}(\mathcal{O}_X)$ est un topos.
- La catégorie des actions continues d'un groupe topologique sur des ensembles est un topos.
- Le topos étale d'un schéma est un topos.

Théorème (MacLane, Lawvere-Tierney dans un cas similaire)

Tout topos $\mathcal{E}$ *admet un classificateur des sous-objets* Ω. *De plus les* $\mathrm{Sub}(c), c \in \mathcal{E}$ *sont des algèbres de Heyting complètes.*

Idée: faisceautisation du foncteur des cribles dans $\hat{\mathbf{C}}$ par rapport à la topologie J.

Topos classifiant

Théorème (Joyal, Makkai, Reyes)

Toute théorie géométrique $\mathbb{T}$ admet un **topos classifiant** $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *qui donne une équivalence de catégories entre la catégorie* $\mathbf{G\acute{e}om}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}})$ *des adjonctions* $\mathcal{E} \leftrightarrows \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *et la catégorie* $\mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathcal{E})$ *des modèles de* $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

$$(f^*\colon \mathcal{E} \leftrightarrows \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \colon f_*) \longmapsto f(\mathcal{U}_{\mathbb{T}}),$$

Où $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ *est un « modèle universel » de* $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$*, tel que les théorèmes (géométriques) de* $\mathbb{T}$ *sont exactement les séquents satisfaits dans* $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$.

Théorème (Joyal, Makkai, Reyes)

Toute théorie géométrique $\mathbb{T}$ admet un **topos classifiant** $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *qui donne une équivalence de catégories entre la catégorie* $\mathbf{G\acute{e}om}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}})$ *des adjonctions* $\mathcal{E} \leftrightarrows \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ *et la catégorie* $\mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}\,(\mathcal{E})$ *des modèles de* $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

$$(f^*\colon \mathcal{E} \leftrightarrows \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\colon f_*) \longmapsto f(\mathcal{U}_{\mathbb{T}}),$$

Où $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ *est un « modèle universel » de* $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, *tel que les théorèmes (géométriques) de* $\mathbb{T}$ *sont exactement les séquents satisfaits dans* $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$.

Par exemple, le topos classifiant de la théorie des extensions algébriques de F est le topos des pré-faisceaux $\hat{\mathbf{C}}$ où $\mathbf{C}$ est la catégorie des extensions séparables finies de F.

Une conséquence du formalisme quantique est le théorème de non-clonage:

Théorème de non-clonage

Il n'existe pas de boîte noire qui lorsqu'on lui donne une particule quelconque en renvoie deux identiques à la première.

Une conséquence du formalisme quantique est le théorème de non-clonage:

Théorème de non-clonage

Il n'existe pas de boîte noire qui lorsqu'on lui donne une particule quelconque en renvoie deux identiques à la première.

Etant donné un espace de Hilbert H , il n'existe aucun U unitaire sur $H \otimes H$ telle que pour tous $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in H$ de norme 1, on ait $U(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = z_{\varphi,\psi} |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ où $z_{\varphi,\psi} \in \mathbb{S}^1$.

Une conséquence du formalisme quantique est le théorème de non-clonage:

Théorème de non-clonage

Il n'existe pas de boîte noire qui lorsqu'on lui donne une particule quelconque en renvoie deux identiques à la première.

Etant donné un espace de Hilbert H , il n'existe aucun U unitaire sur $H \otimes H$ telle que pour tous $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in H$ de norme 1, on ait $U(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = z_{\varphi,\psi}\, |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ où $z_{\varphi,\psi} \in \mathbb{S}^1$.

Catégories pour la physique quantique

Une dague-catégorie compacte est une catégorie $\mathbf{D}$ *équipée de foncteurs* ${}^\dagger\colon \mathbf{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{D}$ *et* $\otimes\colon \mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ *avec certaines propriétés.*

La logique interne de $\mathbf{D}$ *est une forme de logique linéaire (selon J.-Y. Girard), dans laquelle on ne peut cloner les hypothèses.*

Une conséquence du formalisme quantique est le théorème de non-clonage:

Théorème de non-clonage

Il n'existe pas de boîte noire qui lorsqu'on lui donne une particule quelconque en renvoie deux identiques à la première.

Etant donné un espace de Hilbert H , il n'existe aucun U unitaire sur $H \otimes H$ telle que pour tous $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in H$ de norme 1, on ait $U(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = z_{\varphi,\psi}\,|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ où $z_{\varphi,\psi} \in \mathbb{S}^1$.

Catégories pour la physique quantique

Une dague-catégorie compacte est une catégorie $\mathbf{D}$ *équipée de foncteurs* ${}^\dagger\colon \mathbf{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{D}$ *et* $\otimes$: $\mathbf{D} \times \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$ *avec certaines propriétés.*

La logique interne de $\mathbf{D}$ *est une forme de logique linéaire (selon J.-Y. Girard), dans laquelle on ne peut cloner les hypothèses.*

Une telle catégorie $\mathbf{D}$ a les mêmes propriétés équationnelles que la catégorie des espaces de Hilberts de dimension finie avec adjonction et produit tensoriel.

On a donc une correspondance propriété des objets / logique / propriétés de la catégorie, interprétable dans le paradigme quantique.

Merci!